Lösningsförslag till tenta 2009-03-13
Matematisk analys D

Uppgift 1.

(a) Vi använder Taylorutvecklingarna

$$e^x = 1 + x + x^2/2 + x^3/6? \cdots \quad , \quad \cos(x) = 1 - x^2/2 + x^4/24 - \cdots$$

och får $e^x - x - \cos(x) = x^2 + O(x^3)$ och naturligtvis

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - \cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}(1 + O(x)\ ) = 1$$

Svar: Gränsvärdet är lika med 1.

(b) Ekvationen är linjär och av första ordningen. Använd integrerande faktorteknik

$$e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2} \quad , \quad (e^{x^2}y)' = 1$$

Direkt integration ger nu $e^{x^2}y = x + C$ och $y(0) = 1$ ger $C = 1$.
Svar: Lösningen är $y(x) = (1 + x)e^{-x^2}$.

Uppgift 2.

(a) Värdeförrådet blir $V_f = \{y : 0 < y \leq 1\}$. För varje $y \in V_f$ ser vi på ekvationen

$$\frac{1}{x^4+1} = y \ \Leftrightarrow\ x^4 + 1 = \frac{1}{y} \ \Leftrightarrow\ x = (\frac{1}{y} - 1)^{1/4} = f^{-1}(y).$$

Observera att $x \geq 0$.
Svar: $f^{-1}(x) = (\frac{1}{x} - 1)^{1/4}$

(b) Använder vi sambandet $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ i ekvationen fås

$$\cos^2(x) - 2\cos(x) + \frac{8}{9} = 0\ ,$$

vilket ger $\cos(\theta_0) = 2/3$, härur fås $\sin(\theta_0) = \sqrt{5}/3$.
Svar: $\tan(\theta_0) = \sqrt{5}/2$.

Uppgift 3. Vi använder här cylindriska skal. Rita själv figur! Volymen, V, blir

$$V = \int_0^{\ln(2)} 2\pi x(1 - (e^x - 1))dx = 2\pi \int_0^{\ln(2)} x(2 - e^x)dx$$

partialintegrera $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = (x - 1)e^x + C$. Vi får nu volymen

$$V = 2\pi \left[x^2 + (1 - x)e^x\right]_0^{\ln(2)}$$

Svar: Volymen blir $2\pi(\ln(2) - 1)^2$.

Uppgift 4. Sätt $c = -1 + i\sqrt{3}$. Eftersom $p(z)$ har reella koefficienter blir även $\bar{c}$ en rot. Faktorsatsen ger att

$$(z-c)(z-\bar{c}) = z^2 - 2Re(c) + c\bar{c} = z^2 + 2z + 4$$

blir en delare till $p(z)$. Således gäller

$$z^4 + az^3 + 2z^2 + bz + 8 = (z^2 + 2z + 4)(z^2 + cz + 2).$$

Identifikation av koefficienterna i vänster- och högerled ger nu

$$\begin{array}{ll} z^3: & a = c + 2 \\ z^2: & 2 = 2 + 2c + 4 \\ z: & b = 4 + 4c \end{array} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = -4 \\ c = -2 \end{cases}$$

Se nu på andragradsekvationen

$$z^2 - 2z + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 1 \pm i$$

Svar: $a = 0$, $b = -4$, rötter: $-1 \pm i\sqrt{3}$, $1 \pm i$

Uppgift 5.

(a) Sätt $\ell(y) = y'' + 4y$. Allmän lösning till den homogena ekvationen $\ell(y) = 0$ blir $A\cos(2x) + B\sin(2x)$, där A och B är godtyckliga konstanter. En lösning till $\ell(y) = e^{-x}$ fås med ansatsen $y_p = ae^{-x}$ och ger $a = 1/5$. Allmän lösning till den inhomogena ekvation plus derivata blir således

$$\begin{array}{l} y(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x) + \frac{1}{5}e^{-x} \\ y'(x) = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x) - \frac{1}{5}e^{-x} \end{array}.$$

Nu fås $y(0) = A + 1/5 = 1$ och $y'(0) = 2B - 1/5 = 1$ och alltså $A = 4/5$ och $B = 3/5$.
Svar: $y(x) = \frac{1}{5}(4\cos(2x) + 3\sin(2x) + e^{-x})$

(b) Vi försöker skriva ekvationen på separabel form

$$e^y y' - 2e^x = e^{y+x} \;\Leftrightarrow\; e^y y' = e^{y+x} + 2e^x = e^x \cdot (e^y + 2).$$

Nu får vi lätt

$$\frac{e^y}{e^y + 2} y' = e^x \;\Leftrightarrow\; \ln(e^y + 2) = e^x + C.$$

Begynnelsevillkoret $y(0) = 0$ ger $\ln(3) = 1 + C$, dvs $C = \ln(3) - 1$. Vi tar e upphöjt till båda leden i 'lösningen' ovan och får

$$e^y + 2 = e^{e^x + C} = e^{e^x + \ln(3) - 1} = e^{e^x} e^{\ln(3) - 1} = 3e^{-1}e^{e^x}.$$

Svar: $y(x) = \ln(3e^{-1}e^{e^x} - 2)$