Singulära integraloperatorer

Hasse Carlsson

1993

Innehåll

1. Lite bakgrund

1.1. Fördelningsfunktionen.

Låt λ_f vara f:s fördelningsfunktion;

$$\lambda_f(t) = |\{x \in \mathbb{R}^n; |f(x)| > t\}|.$$

Då gäller

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p dx = p \int_0^\infty t^{p-1} \lambda_f(t) dt. \tag{1.1}$$

f ligger i svaga L^p; $f \in L^{p,\infty}$; om $\lambda_f(t) \leq (C/t)^p$ och $\|f\|_{p,\infty} = \inf C$. För $p = \infty$ är $L^{\infty,\infty} = L^\infty$.

Övning 1.1. Bevisa (1.1).

Övning 1.2. Visa att $L^p \subsetneq L^{p,\infty}$.

1.2. Kolmogorovs olikhet.

Antag att $f \in L^{1,\infty}$, $|E| < \infty$ och $0 < \delta < 1$. Då gäller

$$\int_E |f|^\delta \leq \frac{1}{1-\delta} |E|^{1-\delta} \|f\|^\delta_{1,\infty}.$$

Bevis.

$$\begin{aligned}
\int_E |f|^\delta dx &= \int |\chi_E f|^\delta dx = \delta \int_0^\infty t^{\delta-1} \lambda_{\chi_E |f|}(t) dt \\
&\leq \delta \int_0^\infty t^{\delta-1} \min(|E|, |\{|f| > t\}|) dt \\
&\leq \delta \int_0^\infty t^{\delta-1} \min(|E|, \frac{\|f\|_{1,\infty}}{t}) dt \\
&\leq \text{räkna själv} \leq \frac{1}{1-\delta} |E|^{1-\delta} \|f\|^\delta_{1,\infty}.
\end{aligned}$$

■

1.3. Marcinkiewics interpolationssats.

Antag att T är en sublinjär operator med

$$T : \begin{cases} L^p \to L^{p,\infty}, \\ L^q \to L^{q,\infty}, \qquad 1 \leq p < q \leq \infty. \end{cases}$$

Då gäller $T : L^r \to L^r$ för alla $p < r < q$.

Anmärkning 1.1. Detta är bara ett specialfall av Marcinkiewicz interpolationssats; för en mer allmän formulering se t.ex. Bergh/Löfström:*Interpolation spaces.* □

Bevis av satsen då $p = 1$ och $q = \infty$. Låt $A = \|T\|_{L^\infty \to L^\infty}$ och sätt

$$f_1 = \begin{cases} f & \text{om } |f| > t/2A, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

och $f_2 = f - f_1$. Eftersom $|Tf| \leq |Tf_1| + |Tf_2| \leq |Tf_1| + t/2$ är $\{|Tf| > t\} \subset \{|Tf_1| > t/2\}$. Så, eftersom T är svag typ (1,1),

$$|\{|Tf| > t\}| \leq \frac{C}{t}\|f_1\|_1 = \frac{C}{t}\int_{|f|>t/2A} |f|,$$

och

$$\begin{aligned} \|Tf\|_r^r &= \int |Tf|^r dx = r\int_0^\infty t^{r-1}|\{|Tf| > t\}|dt \\ &\leq r\int_0^\infty t^{r-1}dt\frac{C}{t}\int_{|f|>t/2A} |f|dx = Cr\int |f(x)|dx\int_0^{2A|f|} t^{r-2}dt \\ &= \frac{Cr}{r-1}2A^{r-1}\int |f|^r dx = C_r\|f\|_r^r. \end{aligned}$$

■

Övning 1.3. Bevisa det allmänna fallet.

2. Hardy-Littlewoods maximalsats

Hardy-Littlewoods maximalfunktion definieras genom

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} |f(y)|dy, x \in \mathbb{R}^n.$$

Sats 2.1. *(Hardy-Littlewoods maximalsats)*

$$M : \begin{cases} L^p \to L^p, 1 < p \leq \infty, \\ L^1 \to L^{1,\infty}. \end{cases}$$

För beviset behöver vi följande övertäckningslemma.

Lemma 2.2. *Givet ändligt många bollar $B_{r_i}(x_i)$. Då finns en delfamilj $B_1, ..., B_k$ av dessa bollar där $B_i \cap B_j = \emptyset$ om $i \neq j$ och $|\cup B_{r_i}(x_i)| \leq 3^n \sum_1^k |B_i|$.*

Bevis. Recept: Låt B_1 vara en boll med maximal radie. Antag att $B_1, ..., B_l$ är valda. Låt B_{l+1} vara en boll med maximal radie bland de bollar som inte råkar $B_1 \cup ... \cup B_l$.

På detta sätt får vi $B_1, ..., B_k$. Det är självklart att B_i och B_j är disjunkta. Vidare, om $B_r(x)$ ej är en av dessa B_i, så i något steg, l, har r maximal radie. Att $B_r(x)$ ej valdes betyder att $B_r(x)$ råkar någon B_i med radie $\geq r$. Men då gäller $B_r(x) \subset 3B_i$. Alltså

$$|\cup B_r(x)| \leq |\cup 3B_i| = 3^n |\cup B_i| = 3^n \sum_1^k |B_i|.$$

■

Anmärkning 2.1. Ändligt många är inte nödvändigt. Men "något" krävs. Exempel:$\{B_n(0); n = 1, 2, 3, ...\}$. □

Övning 2.1. Visa att $\sup r_i < \infty$ är tillräckligt.

Bevis av Sats 2.1. Det är självklart att $M : L^\infty \to L^\infty$.

Övertäckningslemmat ger $L^1 \to L^{1,\infty}$:

Låt $E_\lambda = \{x; Mf(x) > \lambda\}$. På grund av regularitet hos Lebesguemåttet räcker det att visa att $|K| \leq \frac{C}{\lambda}\|f\|_1$ för varje kompakt delmängd av E_λ. Om $x \in K$ så finns en boll B_x med $\frac{1}{|B_x|}\int_{B_x} |f| > \lambda$. Täck K med ändligt många sådana B_x och använd övertäckningslemmat till att plocka ut $B_1, ..., B_k$ från dessa. Då gäller

$$|K| \leq |\cup B_x| \leq 3^n \sum |B_i| \leq 3^n \frac{1}{\lambda} \sum \int_{B_i} |f| \leq \frac{3^n}{\lambda}\|f\|_1.$$

Från dessa två ändpunktsresultat följer satsen med Marcinkiewicz interpolationssats.

■

Som ett korollarium får vi

Sats 2.3. *(Lebesgues sats)*

Om $f \in L^1_{lok}$ så gäller

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} f(y)dy = f(x) \text{ n.ö.}$$

Detta är ett specialfall av ett mer allmänt resultat: Låt T_ϵ vara operatorer på L^p och sätt

$$T^*f = sup_{\epsilon > 0}|T_\epsilon f|.$$

Sats 2.4. *Antag att $T_\epsilon f(x) \to Tf(x)$ n.ö. för en tät klass $\mathcal{A}$ av funktioner i L^p (t.ex. $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$) och att*

$$T^* : L^p \to L^{p,\infty}.$$

Då finns en operator T med

$$\lim_{\epsilon \to 0} T_\epsilon f(x) = Tf(x) \text{ n.ö.}$$

och

$$T : L^p \to L^{p,\infty}.$$

Om dessutom $T^* : L^p \to L^p$ så $T_\epsilon f \to Tf$ i L^p.

Anmärkning 2.2. Om $T_\epsilon g(x) \to g(x)$ då $g \in \mathcal{A}$ så gäller $T = Id.$, dvs. $T_\epsilon f(x) \to f(x)$ n.ö., $f \in L^p$. □

Bevis. Låt $\operatorname{osc} f(x) = \limsup_{\epsilon_1, \epsilon_2 > 0} |T_{\epsilon_1} f(x) - T_{\epsilon_2} f(x)|$. Det gäller att visa att $\operatorname{osc} f(x) = 0$ n.ö. Observera att $\operatorname{osc} f(x) \le 2T^* f(x)$ och tag $g \in \mathcal{A}$ med $\|f - g\|_p < \delta$. Vidare är $\operatorname{osc} f = \operatorname{osc}(f - g)$ och alltså

$$\begin{aligned} |\{\operatorname{osc} f > \lambda\}| &= |\{\operatorname{osc}(f-g) > \lambda\}| \le |\{2T^*(f-g) > \lambda\}| \\ &\le \left(\frac{C}{\lambda}\|f-g\|_p\right)^p \le \left(\frac{C\delta}{\lambda}\right)^p. \end{aligned}$$

Men δ är godtyckligt så $|\{\operatorname{osc} f > \lambda\}| = 0$ för alla λ och alltså $\operatorname{osc} f = 0$ n.ö.

Om $T^* : L^p \to L^p$ får vi $T_\epsilon f \to Tf$ i L^p med dominerad konvergens ty $|T_\epsilon f - Tf|^p \le 2^p (T^* f)^p \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Till sist låt $S_\epsilon = T_\epsilon - Id$. Det gäller att visa $\lim_{\epsilon \to 0} S_\epsilon = 0$ n.ö. S_ϵ uppfyller samma villkor som T_ϵ och $S_\epsilon g \to 0$ då $g \in \mathcal{A}$. Så

$$|\{|\lim S_\epsilon f| > \lambda\}| = |\{|\lim S_\epsilon (f-g)| > \lambda\}| \le \left(\frac{C}{\lambda}\|f-g\|_p\right)^p.$$

■

3. Principalvärdesintegraler

Låt $k(x), x \in \mathbb{R}^n$, vara en kärna som uppfyller

$$|k(x)| \le \frac{C_1}{|x|^n} \tag{3.1}$$

(SV)

$$|\nabla k(x)| \le \frac{C_2}{|x|^{n+1}}, \tag{3.2}$$

och

$$\text{(KV)} \qquad \int_{a<|x|<b} k(x)dx = 0. \tag{3.3}$$

Vi låter K beteckna den associerade faltningsoperatorn;

$$\begin{aligned} Kf(x) &= \mathrm{pv}k * f(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|y|>\epsilon} f(x-y)k(y)dy \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x-y|>\epsilon} f(y)k(x-y)dy. \end{aligned}$$

Det är lätt att se att Kf är väldefinierad (punktvis) om $f \in C_0^\infty$.

Sats 3.1. *(Calderon-Zygmund)*

$$K : \begin{cases} L^p \to L^p, 1 < p < \infty, \\ L^1 \to L^{1,\infty}, \\ L^\infty \to BMO. \end{cases}$$

Om $k \in L^1$ så gäller $K : L^p \to L^p, 1 \le p \le \infty$, med $\|K\| = \|k\|_1$.

Övning 3.1. Visa det.

Att k uppfyller (SV) implicerar inte att $k \in L^1$, och att Sats 3.1 trots det gäller beror på kancelation i integralen som definierar Kf.

För att bevisa Sats 3.1 då $p < \infty$ antar vi först att $k \in L^1$ (så att alla integraler har mening) och visar satsen med uppskattningar som inte beror på $\|k\|_1$. Sedan utvidgar vi till en allmän kärna genom trunkering och gränsövergång.

När $k \in L^1$ består argumentet av tre steg.

Steg 1: Visa att $\hat{k} \in L^\infty$, och alltså på grund av Parseval $K : L^2 \to L^2$.
Steg 2: Visa att L^2-begränsning och (SV) ger $K : L^1 \to L^{1,\infty}$.
Steg 3: Använd interpolation och dualitet för att visa $K : L^p \to L^p$, $1 < p < \infty$.

Steg 1:

Lemma 3.2. $|\hat{k}(\xi)| \le C$.

Bevis. Om $y \in \mathbb{R}^n$ så

$$\begin{aligned}\hat{k}(\xi) &= \int e^{-ix\xi} k(x)dx = \int e^{-i(x-y)\xi} k(x-y)dx \\ &= e^{iy\xi} \int e^{-ix\xi} k(x-y)dx.\end{aligned}$$

Låt $y_0 = \pi\xi/|\xi|^2$. Då är $e^{iy_0\xi} = -1$, så

$$\begin{aligned}2\hat{k}(\xi) &= \int \{k(x) - k(x-y_0\} e^{-ix\xi} dx \\ &= \int_{|x|\le 2|y_0|} + \int_{|x|>2|y_0|} \{k(x) - k(x-y_0)\} e^{-ix\xi} dx \\ &= A + B.\end{aligned}$$

Att uppskatta B är lätt; (3.2) ger

$$|k(x) - k(x-y_0)| \lesssim \frac{|y_0|}{|x|^{n+1}}$$

och vi får

$$|B| \lesssim \int_{|x|>2|y_0|} \frac{|y_0|}{|x|^{n+1}} dx = C.$$

För att uppskatta A skriver vi

$$\begin{aligned}A &= \int_{|x|\le 2|y_0|} (e^{-ix\xi} - 1)k(x)dx + \int_{|x|\le 2|y_0|} k(x)dx \\ &- \int_{|x|\le 2|y_0|} e^{-ix\xi} k(x-y_0)dx = I_1 + I_2 - I_3.\end{aligned}$$

(KV) ger $|I_2| = 0$. Vidare är enligt (3.1)

$$\begin{aligned}|I_1| &\le \int_{|x|\le 2|y_0|} |x||\xi||k(x)|dx \le |\xi| \int_{|x|<2|y_0|} \frac{dx}{|x|^{n-1}} \\ &\lesssim |\xi||y_0| = C.\end{aligned}$$

I_3 är svårare. Skriv

$$\begin{aligned}I_3 &= \int_{|x|\le 2|y_0|} (e^{-ix\xi} + 1)k(x-y_0)dx - \int_{|x|\le 2|y_0|} k(x-y_0)dx \\ &= I_4 - I_5.\end{aligned}$$

Eftersom $1 = -e^{-iy_0\xi}$, är $|e^{-ix\xi}+1| \leq |\xi||x-y_0|$ och alltså

$$\begin{aligned} |I_4| &\lesssim |\xi| \int_{|x|\leq 2|y_0|} |x-y_0||k(x-y_0)|dx \\ &\leq |\xi| \int_{|x-y_0|\leq 3|y_0|} |x-y_0||k(x-y_0)| \leq \quad \text{jämför} \quad I_1 \leq C. \end{aligned}$$

För att uppskatta I_5 observerar vi att $\{|x| \leq 2|y_0|\} \subseteq \{|x-y_0| \leq 3|y_0|\}$ och alltså ger (KV)

$$I_5 = \int_{|x-y_0|\leq 3|y_0|} - \int_{\substack{|x-y_0|\leq 3|y_0| \\ |x|>2|y_0|}} k(x-y_0)dx = 0 - I_6.$$

Till sist (puh!), för att uppskatta I_6, observerar vi att här är $|x-y_0| \geq |x| - |y_0| \geq 2|y_0| - |y_0| = |y_0|$ så

$$|I_6| \leq \int_{|y_0|\leq|x-y_0|\leq 3|y_0|} |k(x-y_0)|dx \leq C$$

på grund av (3.1). ∎

Steg 2:

Lemma 3.3. *Om $K : L^r \to L^r$ för något $1 < r < \infty$ och $k \in (SV)$ så $K : L^1 \to L^{1,\infty}$.*

Anmärkning 3.1. Det räcker att anta att $K : L^r \to L^{r,\infty}$. □

Huvudverktyget för att bevisa detta ges av

Lemma 3.4. *(Calderon-Zygmunduppdelning av f)*
Antag att $0 \leq f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ och låt $\alpha > 0$. Då finns en partition av $\mathbb{R}^n$ så att

i) $\mathbb{R}^n = F \cup \Omega, F \cap \Omega = \emptyset$
ii) $f(x) \leq \alpha$ *n.ö. på* F,

och

iii) $\Omega = \bigcup_k Q_k$ *där* Q_k *är kuber med disjunkt inre och* $\alpha < \frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} f(x)dx \leq 2^n\alpha$

Observera att

$$|\Omega| = \sum |Q_k| \leq \sum \frac{1}{\alpha} \int_{Q_k} f(x)dx \leq \frac{1}{\alpha}\|f\|_1.$$

Så vi har följande

Följdsats 3.5. *iv)* $|\Omega| \le \frac{1}{\lambda}\|f\|_1$

Definiera nu

$$g(x) = \begin{cases} f(x),\ x \in F \\ \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f,\ x \in Q_j^0 \end{cases}$$

och låt $b = f - g$. Sätt $b_j = b\chi_{Q_j}$. Så vi har

$$f = g + \sum b_j,$$

där $\|g\|_\infty \le C\alpha$ och $\int b_j = 0$.

Detta kallas för Calderon-Zygmunduppdelningen av f på nivån α.

Bevis av Lemma 3.4. Dela först upp $\mathbb{R}^n$ i ett gitter av kuber Q' som är så stora att

$$\frac{1}{|Q'|}\int_{Q'} f \le \alpha.$$

Fixera en sådan kub Q' och dela den i 2^n lika stora delkuber. Låt Q'' vara en sådan delkub. Då gäller antingen

i) $\frac{1}{|Q''|}\int_{Q''} f \le \alpha$

eller

ii) $\frac{1}{|Q''|}\int_{Q''} f > \alpha$.

I fall ii) är vi klara; Q'' blir en av kuberna Q_k. Observera att

$$\frac{1}{|Q''|}\int_{Q''} f \le \frac{1}{|Q''|}\int_{Q'} f = 2^n \int_{Q'} f = 2^n\alpha.$$

I fall i) utför vi samma procedur på Q'' som på Q' ovan, osv.

Låt nu $\Omega = \cup Q_k$ vara unionen av alla kuber som vi fått från fall ii). Beviset är klart om vi kan visa $f \le \alpha$ n.ö. på $F = \Omega^c$. Men om $x \in F$, så finns kuber Q_i med $x \in \bar{Q}_i$ och $|Q_i| \to 0$. Lebesgues deriveringssats ger därför $f(x) = \lim \frac{1}{|Q_i|}\int_{Q_i} f \le \alpha$ n.ö. på F. ∎

Bevis av Lemma 3.3 då $p = 2$. Eftersom $K : L^2 \to L^2$ så $K : L^2 \to L^{2,\infty}$, dvs.

$$|\{|Kf| > \alpha\}| \le \frac{C}{\alpha^2}\|f\|_2^2.$$

För en kub Q med centrum c låter vi Q^* beteckna kuben med samma centrum men med $2\sqrt{n}$ så stor sida. Om $x \notin Q^*$ och $y \in Q$ så gäller $|x -$

$c| \sim |x-y|$. Calderon-Zygmunduppdela f på nivån α, låt $\Omega^* = \cup Q_k^*$ och $F^* = \mathbb{R}^n \setminus \Omega^*$. Nu är

$$|\{x; |Kf(x)| > \alpha\}| \leq |\{x; |Kg(x)| > \frac{\alpha}{2}\}| + |\{x; |Kb(x)| > \frac{\alpha}{2}\}|$$

Observera att

$$\|g\|_2^2 = \int_F |g|^2 + \int_\Omega |g|^2 \leq \alpha \int |f| + (2^n\alpha)^2|\Omega| \leq C\alpha\|f\|_1.$$

Så

$$|\{|Kg| > \frac{\alpha}{2}\}| \leq \frac{C}{\alpha^2}\|g\|_2^2 \leq \frac{C}{\alpha}\|f\|_1.$$

För att uppskatta Kb, observerar vi att eftersom $\int b_j = 0$, så gäller om c_j är centrum i Q_j att

$$Kb_j(x) = \int_{Q_j} \{k(x-y) - k(x-c_j)\} b(y) dy.$$

Vi får därför

$$\begin{aligned}
\int_{F^*} |Kb(x)| dx &\lesssim \sum_j \int_{x \in F^*} dx \int_{y \in Q_j} |k(x-y) - k(x-c_j)||b(y)| dy \\
&= \text{Fubini} = \sum_j \int_{y \in Q_j} |b(y)| dy \int_{x \in F^*} |k(x-y) - k(x-c_j)| dx \\
&\leq \sum_j \int_{Q_j} |b(y)| dy \int_{x \notin Q_j^*} \frac{|y-c_j|}{|x-c_j|^{n+1}} dx \lesssim \int |b| \leq \|f\|_1.
\end{aligned}$$

Chebyshevs olikhet ger nu

$$|\{x \in F^*; |Kb(x)| > \frac{\alpha}{2}\}| \leq \frac{C}{\lambda}\|f\|_1$$

Men då

$$|\{x \in \Omega^*; |Kb(x)| > \frac{\alpha}{2}\}| \leq |\Omega^*| \leq \frac{C}{\lambda}\|f\|_1$$

är vi klara. ■

Steg 3:

Detta är lätt. Vi vet att $K : L^2 \to L^2$ (och alltså $K : L^2 \to L^{2,\infty}$) och $K : L^1 \to L^{1,\infty}$. Marcinkiewicz interpolationsats ger därför $K : L^p \to L^p, 1 < p < 2$.

För $p > 2$ använder vi dualitet. Låt K^* vara adjunkten till K, dvs. $< K^*f, g >=< f, Kg >$ där $<, >$ är skalärprodukten på L^2.

Då har K^* kärnan $\check{k}(x) = k(-x)$. $\check{k}$ uppfyller samma uppskattningar som k och enligt ovan gäller därför $K^* : L^q \to L^q, 1 < q < 2$. Men då gäller för $p > 2$ och $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ att

$$\begin{aligned}\|Kf\|_p &= \sup_{\|g\|_q \le 1} < Kf, g >= \sup_{\|g\|_q \le 1} < f, K^*g > \\ &\le \sup_{\|g\|_q \le 1} \|f\|_p \|K^*g\|_q \le \sup_{\|g\|_q \le 1} C\|f\|_p \|g\|_q = C\|f\|_p.\end{aligned}$$

■

Övning 3.2. Visa Sats 3.1 under följande svagare (Visa det!) villkor på k.

$$\int_{|x|\le R} |xk(x)|dx \le C_1 R \tag{3.4}$$

(SV)

$$\int_{|x|>2|y|} |k(x-y) - k(x)|dx \le C_2 \qquad \text{(Hörmandervillkoret)} \tag{3.5}$$

(KV)

$$\int_{a<|x|<b} k(x)dx \le C_3,$$

och

$$\lim_{\delta\to 0} \int_{\delta<|x|<b} k(x)dx \text{ existerar.} \tag{3.6}$$

Vi skall nu bevisa Sats 3.1 för $p > 1$ utan att anta $k \in L^1$. Tag först $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ och låt $K_{\epsilon,N}f = k_{\epsilon,N} * f$ där $k_{\epsilon,N} = k\chi_{\epsilon<|x|<N}$. Eftersom $k_{\epsilon,N} \in L^1$ och $k_{\epsilon,N}$ uppfyller (SV) och (KV) i Övning 3.2 (Visa det!), har vi $K_{\epsilon,N} : L^p \to L^p, 1 < p < \infty$ och $\|K_{\epsilon,N}\| \le C_p$ oberoende av ϵ, N.

Om N är stort nog (beroende på stöd f) gäller $K_{\epsilon,N}f = K_\epsilon f$. Så Fatous lemma ger

$$\|K_\epsilon f\|_p = \|\lim_{N\to\infty} K_{\epsilon,N}f\|_p \le \liminf_{N\to\infty} \|K_{\epsilon,N}f\|_p \le C_p\|f\|_p, f \in C_0^\infty.$$

(Ett enkelt täthetsargument visa att detta gäller för alla $f \in L^p$.)

För att visa att $\lim_{\epsilon\to 0} K_\epsilon f$ existerar, räcker det att visa att $K_\epsilon f$ är en Cauchyföljd i L^p. Men om $\epsilon_1 < \epsilon_2$ så gäller

$$\begin{aligned}K_{\epsilon_1}f(x) - K_{\epsilon_2}f_(x) &= \int_{\epsilon_1<|y|<\epsilon_2} k(y)f(x-y)dy \\ &= \int_{\epsilon_1<|y|<\epsilon_2} k(y)\{f(x-y) - f(x)\}dy\end{aligned}$$

Eftersom $\int |f(x-y)-f(x)|^p dx \leq C|y|^p$ då $f \in C_0^\infty$, ger Minkowskis olikhet

$$\|K_{\epsilon_1}f - K_{\epsilon_2}f\|_p \lesssim \int_{\epsilon_1<|y|<\epsilon_2} |y||k(y)|dy \to 0 \ \text{for}\, \epsilon_1, \epsilon_2 \to 0.$$

Så $K_\epsilon f$ är en Cauchyföljd och alltså existerar $Kf = \lim_{\epsilon\to 0} K_\epsilon f$ i L^p och vi får (Fatous lemma igen) $\|Kf\|_p \leq C_p\|f\|_p, f \in C_0^\infty$. Om f är en godtycklig L^p-funktion tag $g \in C_0^\infty$ med $\|f-g\|_p < \delta$. Då gäller

$$\begin{aligned}\|K_{\epsilon_1}f - K_{\epsilon_2}f\|_p &= \|K_{\epsilon_1}(f-g)\|_p \\ &+ \|K_{\epsilon_1}g - K_{\epsilon_2}g\|_p + \|K_{\epsilon_2}(g-f)\|_p \\ &\lesssim \|g-f\|_p + o(1) \leq \delta + o(1).\end{aligned}$$

Så $K_\epsilon f$ är en Cauchyföljd också då $f \in L^p$, och beviset är klart.

■

Argument ovan fungerar inte då $p = 1$. (Varför?) Ett sätt att bevisa satsen då $p = 1$, är att bevisa Steg 2 för $Kf = \lim_{\epsilon\to 0} K_\epsilon f$ direkt. Här väljer vi en annan metod som också visar att $Kf = \lim_{\epsilon\to 0} K_\epsilon f$ existerar punktvis.

Definiera maximaloperatorn K^* genom

$$K^* f = \sup_{\epsilon>0} |K_\epsilon f|.$$

Då gäller

Sats 3.6.

$$K^* : \begin{cases} L^p \to L^p, \ 1 < p < \infty \\ L^1 \to L^{1,\infty}. \end{cases}$$

Detta följer från

Lemma 3.7. *(Cotlars olikhet)*

Låt $0 < \delta \leq 1$ *och* $f \in C_0^\infty$.*Då gäller*

$$K^* f \leq C\{(M(Kf)^\delta)^{1/\delta} + Mf\}.$$

(M är Hardy-Littlewoods maximalfunktion.)

Bevis av Sats 3.6. Då $p > 1$, kan vi ta $\delta = 1$ i Cotlars olikhet och Sats 3.6 följer omedelbart eftersom $M : L^p \to L^p$ och $K : L^p \to L^p$. Fallet $p = 1$ är svårare; sammansättningen av två svag- typ (1,1) operatorer är inte nödvändigtvis svag- typ (1,1). Det gäller att visa att $[M(Kf)^\delta]^{1/\delta}$ är svag-typ (1,1). Observera att om $f \in L^1$ så gäller (Visa det! Jämför §1.3.)

$$|\{x; Mf(x) > \lambda\}| \lesssim \frac{1}{\lambda} \int_{\{|f| > \frac{\lambda}{2}\}} |f|.$$

Så

$$\begin{aligned} |\{[M(Kf)^\delta]^{1/\delta} > \lambda\}| &\lesssim \frac{1}{\lambda^\delta} \int_{\{|Kf| > c\lambda\}} |Kf|^\delta \lesssim \text{Kolmogorovs olikhet} \\ &\lesssim \frac{1}{\lambda^\delta} |\{|Kf| > c\lambda\}|^{1-\delta} \|Kf\|_{1,\infty}^\delta \lesssim \frac{1}{\lambda^\delta} \frac{1}{\lambda^{1-\delta}} \|f\|_1^{1-\delta} \|f\|_1^\delta \end{aligned}$$

och saken är klar för $f \in C_0^\infty$.

Detta utvidgas lätt (?) till $f \in L^1$.

■

Övning 3.3. Gör det!

Följdsats 3.8. *Om $f \in L^p, 1 \le p < \infty$, så $K_\epsilon f(x) \to Kf(x)$ n.ö.*

Bevis. Se §2. ■

Bevis av Cotlars olikhet. Vi låter först $\delta = 1$. Det räcker att visa att

$$|K_\epsilon f(0)| \le C(MKf(0) + Mf(0))$$

för alla $\epsilon > 0$. Låt $B = \{y; |y| < \epsilon/2\}$, $f_1 = f\chi_{2\bar{B}}$ och $f_2 = f - f_1$. Då gäller $Kf_2(0) = K_\epsilon f(0)$. Vidare gäller om $x \in B$

$$|Kf_2(0) - Kf_2(x)| \le CMf(0). \tag{3.7}$$

Övning 3.4. Visa det.

Så

$$\begin{aligned} |K_\epsilon f(0)| &= |Kf_2(0)| \le |Kf_2(x)| + |Kf_2(x) - Kf_2(0)| \\ &\le |Kf_1(x)| + |Kf(x)| + CMf(0). \end{aligned}$$

Om $K_\epsilon f(0) = 0$ är påståendet självklart. Om inte, tag $0 < \lambda < |K_\epsilon f(0)|$. Om $x \in B$ gäller antingen

$$|Kf(x)| > \frac{\lambda}{3}, \; |Kf_1(x)| > \frac{\lambda}{3} \quad \text{eller} \quad CMf(0) > \frac{\lambda}{3},$$

dvs.

$$Mf(0) \geq \frac{\lambda}{3C}$$

eller

$$B = \{x \in B; |Kf| > \frac{\lambda}{3}\} \cup \{x \in B; |Kf_1| > \frac{\lambda}{3}\}.$$

I det första fallet är påståendet självklart, och i det andra har vi

$$\begin{aligned} |\{x \in B; |Kf| > \frac{\lambda}{3}\}| &= \int_{B \cap \{(Kf) > \frac{\lambda}{3}\}} dx \\ &\leq \frac{3}{\lambda} \int_B |Kf| \leq \frac{3}{\lambda} |B| M(Kf)(0). \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} |\{x \in B; |Kf_1| > \frac{\lambda}{3}\}| &\leq \frac{C}{\lambda} \|f_1\|_1 \\ &= \frac{C}{\lambda} \int_B |f| \leq \frac{C|B|}{\lambda} Mf(0). \end{aligned}$$

Alltså

$$|B| \leq \frac{C}{\lambda} |B| (MKf(0) + Mf(0))$$

också i detta fall och beviset är klart då $\delta = 1$.

Om $0 < \delta < 1$ så gäller

$$|K_\epsilon f(0)|^\delta \leq C_\delta (|Kf(x)|^\delta + |Kf_1(x)|^\delta + Mf(0)^\delta).$$

Om vi tar medelvärdet över B och upphöjer till $1/\delta$ får vi

$$|K_\epsilon f(0)| \lesssim (M(Kf)^\delta)^{1/\delta}(0) + Mf(0) + (\frac{1}{|B|} \int_B |Kf_1(x)|^\delta)^{1/\delta}.$$

För den sista termen ger Kolmogorovs olikhet

$$\begin{aligned} \frac{1}{|B|} \int_{|B|} |Kf_1|^\delta &\leq \frac{1}{1-\delta} \frac{1}{|B|} |B|^{1-\delta} \|Kf_1\|_{L^{1,\infty}}^\delta \\ &\lesssim |B|^{-\delta} (\|f_1\|_1)^\delta = Mf(0)^\delta. \end{aligned}$$

■

4. Singulära integraloperatorer och $T1$-satsen

Vi skall nu studera mer allmänna (än de i Kapitel 3) integraloperatorer av typen

$$Kf(x) = \int k(x,y)f(y)dy \tag{4.1}$$

där $k(x,y) \notin L^1$. I det klassiska fallet var $k(x,y) = k_0(x-y)$. Som där gäller det att ge mening åt den divergenta integralen i (4.1).

Definition 4.1. *En funktion $k(x,y)$ definierad på $R^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{x=y\}$ kallas en standardkärna om*

$$|k(x,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^n}, \tag{4.2}$$

och för $|x-z| < \frac{1}{2}|x-y|$,

$$\begin{aligned} |k(x,y) - k(z,y)| &\leq \frac{C}{|x-y|^n}\left(\frac{|x-z|}{|x-y|}\right)^\delta \\ |k(y,x) - k(y,z)| &\leq \frac{C}{|x-y|^n}\left(\frac{|x-z|}{|x-y|}\right)^\delta \end{aligned} \tag{4.3}$$

för något $\delta > 0$.

Anmärkning 4.1. Att

$$|\nabla_{x,y}k(x,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^{n+1}}$$

är (mer än) tillräckligt för (4.3) med $\delta = 1$. □

Exempel. $k_1(x,y) = \frac{1}{x-y}$, $k_2(x,y) = \frac{1}{|x-y|}$, $x, y \in \mathbb{R}$. Den första ger en begränsad operator på L^2, den andra gör det inte.

□

Vi skall nu ge mening åt

$$Kf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x,y)f(y)dy$$

Låt $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ beteckna distributionerna.

Definition 4.2. *En kontinuerlig linjär operator $K : C_0^\infty \to \mathcal{D}'$ är* associerad *till en kärna k om för $f, g \in C_0^\infty$ med disjunkta stöd gäller*

$$< Kf, g >= \int\int k(x,y)f(y)g(x)dydx \tag{4.4}$$

Observera att integralen är absolutkonvergent. Vi skiver $K \sim k$.

Jämför detta med

Sats 4.3. *(Schwartz kärnsats)*

Varje kontinuerlig avbildning $K : C_0^\infty \to \mathcal{D}'$ ges av en distributionskärna k så att för $f, g \in C_0^\infty$ gäller

$$< Kf, g >=< k, f \otimes g > .$$

(Men k kan vara ett exotiskt djur.)

Anmärkning 4.2. 1) K kan bara vara associerad till en kärna eftersom (4.4) bestämmer k n.ö. på $\mathbb{R}^{2n} \setminus \{x = y\}$.

2) Olika operatorer kan vara associerade till samma kärna,t.ex. $0 \sim 0, Id \sim 0$
och $\frac{d}{dx} \sim 0$. □

Definition 4.4. *En* singulär integraloperator *är en kontinuerlig avbildning $K : C_0^\infty \to \mathcal{D}'$ som är associerad till en standardkärna.*

Det stora problemet i teorin för singulära integraloperatorer är att avgöra när

$$K : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n).$$

Om vi vet att $K : L^2 \to L^2$ så kan, på grund av standard uppskattningarna av kärnan, detta utvidgas till $K : L^p \to L^p$ på samma sätt som för faltningsoperatorerna i §3.

Det hela (dvs. att definiera K) blir enklare för antisymmetriska kärnor; dvs. då

$$k(x, y) = -k(y, x).$$

Då kan vi för godtyckliga $f, g \in C_0^\infty$ sätta

$$< Kf, g >= \frac{1}{2} \int\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} [f(y)g(x) - f(x)g(y)]k(x, y)dxdy \tag{4.5}$$

K kallas för den till k *kanoniskt associerade* operatorn. Observera att integralen är absolutkonvergent ty $|f(y)g(x) - f(x)g(y)| \leq C|x - y|$, så (4.5) definierar $Kf \in \mathcal{D}'$.

Övning 4.1. Visa att $K : C_0^\infty \to \mathcal{D}'$ kontinuerligt.

Betrakta följande formella kalkyl:

$$\int\int k(x,y)f(y)g(x)dydx = (\frac{1}{2}+\frac{1}{2})\int\int k(x,y)f(y)g(x)dydx$$

$$= \frac{1}{2}\int\int(k(x,y)f(y)g(x) + k(y,x)f(x)g(y))dxdy$$

$$= \frac{1}{2}\int\int[f(y)g(x) - f(x)g(y)]k(x,y)dxdy =< Kf, g > .$$

Kalkylen är riktig om f och g har disjunkta stöd. Så om K är den operator som är kanoniskt associerad till k gäller $K \sim k$.

Exempel. Den till $k = 0$ kanoniskt associerade operatorn är $K = 0$. □

Nästa mål är att bevisa

Sats 4.5. *(En preliminär T1-sats)*
Låt $K \sim k$ där k är en antisymmetrisk standardkärna och antag att $K1 = 0$ i BMO. Då gäller

$$K : L^2 \to L^2.$$

En starkare sats är

Sats 4.6. *(T1-satsen (David-Journeé-83))*
Låt $K \sim k$ där k är en standard kärna. Antag att K är svagt begränsad,

$$K1 \in BMO \quad \textit{och} \quad K^*1 \in BMO.$$

Då är k en begränsad operator på L^2.

Anmärkning 4.3. Satserna innehåller flera begrepp som inte är definierade, t.ex. "svagt begränsad" och BMO. BMO är ett rum som är definierat modulo konstanter, så villkoret $K1 = 0$ i BMO betyder att $K1$ är en konstant. En icke-trivial svårighet med detta villkor är att definiera $K1$ som ett element i BMO. Villkoret att vara svagt begränsad är ett tekniskt villkor som är svagare än att K är begränsad på L^2. Det är uppfyllt för alla antisymmtriska kärnor. □

BMO. Om $f \in L^1_{lok}(\mathbb{R}^n)$ sätter vi

$$f_Q = \frac{1}{Q}\int_Q f,$$

där Q är en axelparallell kub.

Definition 4.7. *$f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ om $f \in L^1_{lok}$ och*

$$\sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |f - f_Q| = \|f\|_{BMO} < \infty.$$

Observera att $\|\text{konst.}\|_{BMO} = 0$ så för at få en norm måste vi arbeta modulo konstanter; två funktioner f och g med $f - g = \text{konst.}$ uppfattas som samma funktion i BMO. För att ge mening åt $K1$ som ett element i BMO behöver vi bara definiera $K1$ modulo konstanter. Vi börjar med att definiera $K1$ som ett element i $\mathcal{D}_0'$.

Definition 4.8. *$\varphi \in \mathcal{D}_0$ om $\varphi \in C_0^\infty$ och $\int \varphi = 0$. $\mathcal{D}_0'$ är dualen till $\mathcal{D}_0$. Så $\mathcal{D}_0' \subset \mathcal{D}'$ med samma konvergensbegrepp som i $\mathcal{D}'$.*

Ett element $u \in \mathcal{D}_0'$ kan utvidgas till $\mathcal{D}'$ och om u_1, u_2 är två utvidgningar så är $u_1 - u_2$ en konstant. Så $\mathcal{D}_0' = \mathcal{D}'/\{\text{konstanter}\}$. För att se detta tar vi $\chi \in C_0^\infty$ med $\int \chi = 1$. För $\varphi \in C_0^\infty$ låter vi $\tilde{\varphi} = \varphi - \chi \int \varphi$. Då är $\tilde{\varphi} \in \mathcal{D}_0$ så $u(\tilde{\varphi})$ är definierat. Gör nu ett val av $u(\chi) = c$, och sätt

$$u(\varphi) = u(\tilde{\varphi}) + u(\chi) \int \varphi = u(\tilde{\varphi}) + c \int \varphi.$$

Övning 4.2. Visa att $u \in \mathcal{D}'$.

För att definiera $K1 \in \mathcal{D}_0'$ behöver vi ge mening åt $< K1, \varphi >$ då $\varphi \in \mathcal{D}_0$. Antag att φ har stöd i $B_r(x)$ och tag $\chi \in C_0^\infty$ med $\chi = 1$ på $B_{2r}(x)$. Vi vill definiera $K1$ så att

$$\begin{aligned} < K1, \varphi > &= < K\chi, \varphi > + < K(1-\chi), \varphi > \\ &= < K\chi, \varphi > + < 1-\chi, K^*\varphi > . \end{aligned} \tag{4.6}$$

Den första termen är väldefinierad och eftersom K^* har kärnan $k(y, x)$ ger standardupskattningarna (med $\delta = 1$) för $y \notin B_{2r}(0)$ att

$$\begin{aligned} |K^*\varphi(y)| &\leq \int |k(x,y) - k(0,y)||\varphi(x)|dx \\ &\lesssim \int \frac{|x|}{|y|^{n+1}} |\varphi(x)| dx \lesssim \frac{r\|\varphi\|_\infty}{|y|^{n+1}}, \end{aligned}$$

så

$$< 1-\chi, K^*\varphi > \lesssim \int_{|y|>2r} \frac{r\|\varphi\|_\infty}{|y|^{n+1}} \lesssim \|\varphi\|_\infty,$$

och alltså är $K1$ väldefinierad som ett element i $\mathcal{D}_0'$.

5. Bevis av den preliminära $T1$-satsen

För beviset behöver vi någon bra metod för att bevisa L^2-begränsning av K. Eftersom K inte längre ges av en faltning fungerar inte Fouriermetoder. Men L^2 är ett Hilbertrum och vi kan använda

Sats 5.1. *(Cotlars lemma)*
Låt K_i vara begränsade operatorer på ett Hilbertrum H med

$$\|K_i K_j^*\| + \|K_i^* K_j\| \leq d^2(i-j) \tag{5.1}$$

där

$$\sum_k d(k) = D < \infty.$$

Då gäller $\|\sum_1^N K_i\| \leq D$ och $\sum_1^N K_i$ konvergerar i norm mot en begränsad operator K.

Bevis. Vi har

$$\|K\|^2 = \sup_{\|f\|\leq 1} < Kf, Kf >= \sup_{\|f\|\leq 1} < K^*Kf, f > \leq \|K^*K\|.$$

Upprepar vi detta, och observerar att $(K^*K)^* = K^*K$, får vi $\|K\|^{2n} \leq \|(K^*K)^n\|$ om $n = 2^k$. (5.1) ger $\|K_i\|^2 \leq \|K_i^*K_i\| \leq d^2(0) \leq D^2$ och alltså $\|K_i\| \leq D$.

Låt $K = \sum_1^N K_i$. Då är

$$(K^*K)^n = (\sum_{ij} K_i^* K_j)^n = \sum K_{i_1}^* K_{j_1} \ldots K_{i_n}^* K_{j_n},$$

och alltså

$$\begin{aligned}
\|(K^*K)^n\| &\leq \sum \|K_{i_1}^* \ldots K_{j_n}\| = \sum \|K_{i_1}^* \ldots K_{j_n}\|^{1/2} \times \|K_{i_1}^* \ldots K_{j_n}\|^{1/2} \\
&\leq \sum \|K_{i_1}^* K_{j_1}\|^{1/2} \ldots \|K_{i_n}^* K_{j_n}\|^{1/2} \\
&\times \|K_{i_1}\|^{1/2} \|K_{j_1} K_{i_2}^*\|^{1/2} \ldots \|K_{j_{n-1}} K_{i_n}^*\|^{1/2} \|K_{j_n}\|^{1/2} \\
&\leq D \sum d(i_1 - j_1) d(j_1 - i_2) d(j_2 - j_2) \ldots d(j_{n-1} - i_n) \leq ND^{2n}.
\end{aligned}$$

Så

$$\|K\|^{2n} \leq ND^{2n} \quad \text{eller} \quad \|K\| \leq N^{1/2n} D.$$

Låter vi $n \to \infty$ ger detta $\|K\| \leq D$. Att $\sum_1^N K_i \to K$ följer av Övning 5.1.

∎

Övning 5.1. Låt x_i vara element i ett Hilbertrum med $\|\sum_1^N \epsilon_i x_i\| \le C$ för alla N och $\epsilon_i = \pm 1$. Visa att då är serien $x = \sum_1^\infty x_i$ normkonvergent.

Övning 5.2. Om vi bara vet att $\|K_i K_j^*\| \le d^2(i-j)$ så följer

$$\sum \|K_i f\|^2 \le C\|f\|^2.$$

a) Visa det med hjälp av Cotlars lemma.

b) Visa det utan att använda Cotlars lemma.

För att bevisa $T1$-satsen skall vi skriva $K = \sum K_i$ där $K_i K_j^*$ har liten norm. Normen av $K_i K_j^*$ kan uppskattas med hjälp av

Lemma 5.2. *(Schurs lemma)*
Antag att $k(x,y)$ uppfyller

$$\sup_x \int |k(x,y)|dy = a < \infty \quad , \quad \sup_y \int |k(x,y)|dx = b < \infty,$$

och sätt

$$Kf(x) = \int k(x,y)f(y)dy.$$

Då gäller

$$\|Kf\|_p \le a^{1-\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{p}} \|f\|_p,\ 1 \le p \le \infty.$$

Speciellt om $p = 2$ så gäller $\|K\| \le \sqrt{ab}$.

Bevis. Vi har

$$\begin{aligned} |Kf(x)| &\le \int |k(x,y)||f(y)|dy \\ &= a(x) \int |f(y)| \frac{|k(x,y)|dy}{a(x)}, \end{aligned}$$

där $a(x) = \int |k(x,y)|dy$. Så Jensen olikhet ger

$$|Kf(x)|^p \le a(x)^p \int |f(y)|^p \frac{|k(x,y)|dy}{a(x)}$$

och

$$\begin{aligned} \int |Kf(x)|^p dx &\le a^{p-1} \int |f(y)|^p dy \int |k(x,y)|dx \\ &\le a^{p-1} b \int |f(y)|^p. \end{aligned}$$

■

Lemma 5.3. *Antag att k_j uppfyller*

$$\begin{aligned} |k_j(x,y)| &\leq \frac{2^{nj}}{(1+2^j|x-y|)^{n+\epsilon}}, \\ |\nabla k_j(x,y)| &\leq \frac{2^{(n+1)j}}{(1+2^j|x-y|)^{n+\epsilon}} \end{aligned}$$

och

$$\int k_j(x,y)dy = \int k_j(x,y)dx = 0.$$

Då gäller

$$\sup_x \int |k_{ij}(x,y)|dy = |i-j|2^{-\frac{1}{2}|i-j|}$$

och

$$\sup_y \int |k_{ij}(x,y)|dx = |i-j|2^{-\frac{1}{2}|i-j|},$$

där

$$k_{ij}(x,y) = \int \bar{k}_i(z,x)k_j(z,y)dz. \tag{5.2}$$

Följdsats 5.4.

$$\|K_i^* K_j\| + \|K_i K_j^*\| \lesssim |i-j|2^{-\frac{1}{2}|i-j|}.$$

Följdsats 5.5. $K = \sum K_i$ *är en begränsad operator på* L^2*.*

En lämplig uppvärmning för beviset är

Övning 5.3. Låt $k(x) = |x|^{-3/4}, x \in \mathbb{R}$. Visa att $|k * k(x)| \lesssim |x|^{-1/2}$.

Bevis av Lemma 5.2 då $n = \epsilon = 1$. Vi visar påståendet då $i > j$. Observera först att

$$\int |k_i(x,y)|dx \sim \int |k_i(x,y)|dy \sim 1,$$

så K_i är väldefinierade operatorer.

Om vi bara uppskattar k_{ij} genom att sätta absolutbelopp i (5.2) får vi $\|k_{ij}\|_{L^1} \sim 1$, som inte duger. Men vi kan också skriva

$$k_{ij}(x,y) = \int \bar{k}_i(z,x)(k_j(z,y) - k_j(x,y))dz. \tag{5.3}$$

För att uppskatta k_{ij} delar vi upp i fyra fall.

A: $|x-y| < 2^{-i}$,

B: $2^{-i} < |x-y| < 2^{-j}$,

C: $2^{-j} < |x-y| < 2^{i-2j}$ och
D: $|x-y| > 2^{i-2j}$.

A och D är lätta, svårigheten i uppskattningarna är då $|x-y| \sim 2^{-j}$.

A:

$$\begin{aligned}|k_{ij}(x,y)| &\leq \int |k_i(z,x)||k_j(z,y)|dz \\ &\lesssim 2^j \int |k_i|dz \sim 2^j.\end{aligned}$$

D: Låt $I_{-\infty} = (-\infty, \frac{x+y}{2})$ och $I_{+\infty} = (\frac{x+y}{2}, +\infty)$. Då är

$$\begin{aligned}|\int_{I_{-\infty}} |\bar{k}_i(z,x)k_j(z,y)|dz &\leq \int |k_i(z,x)|\frac{1}{2^j|x-y|^2}dz \\ &\lesssim \frac{1}{2^j|x-y|^2}.\end{aligned}$$

På samma sätt får vi

$$|\int_{I_{+\infty}} |\bar{k}_i(z,x)k_j(z,y)|dz| \lesssim \frac{1}{2^j|x-y|^2}$$

Eftersom $i > j$ har vi

$$|k_{ij}(x,y)| \lesssim \frac{1}{2^i|x-y|^2}.$$

B: Här använder vi (5.3). Låt $I = (x - \frac{|x-y|}{2}, x + \frac{|x-y|}{2})$ och $J = I^c$. Då gäller

$$\begin{aligned}&|\int_I \bar{k}_i(z,x)(k_j(z,y) - k_j(x,y))dz| \lesssim \int_I |k_i(z,x)||z-x|2^{2j}dz \\ &\lesssim \int_{|z-x|<2^{-i}} 2^i|z-x|2^{2j}dz + \int_{2^{-i}<|z-x|k2^{-j}} \frac{2^{2j}|z-x|}{2^i|z-x|^2}dz \\ &\lesssim 2^{2j-i} + (i-j)2^{2j-i} \leq (i-j)2^{j-i}2^j,\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}\int_J |\bar{k}_i(z,x)(k_j(z,y)-k_j(x,y))| &\leq \int_J \frac{1}{2^i|z-x|^2}\cdot 2^j dz\\ &\lesssim 2^{j-i}\frac{1}{|x-y|}.\end{aligned}$$

Eftersom $|x-y|<2^{-j}$ eller $2^j<\frac{1}{|x-y|}$, så gäller

$$|k_{ij}(x,y)|\lesssim (i-j)2^{j-i}\frac{1}{|x-y|}.$$

C: Här använder vi (5.3) igen.
Låt $I_x=(x-\frac{|x-y|}{2},x+\frac{|x-y|}{2})$, $I_y=(y-\frac{|x-y|}{2},y+\frac{|x-y|}{2})$ och $J=(I_x\cup I_y)^c$.
Då gäller

$$|\int_{I_x}\bar{k}_i(z,x)(k_j(z,y)-k_j(x,y))dz|\leq \int_{I_x}|k_i(z,x)|\frac{|z-x|}{|x-y|^2}dz$$

$$\leq \frac{1}{|x-y|^2}\Big(\int_{|z-x|<2^{-i}}2^i|z-x|dz+\int_{2^{-i}<|z-x|<2^{i-2j}}\frac{|z-x|}{2^i|z-x|^2}dz\Big)$$

$$\lesssim \frac{1}{|x-y|^2}(2^{-i}+(2i-2j)2^{-i})\lesssim \frac{(i-j)2^{-i}}{|x-y|^2},$$

$$|\int_{I_y}\bar{k}_i(z,x)k_j(z,y)dz|\lesssim \int_{I_y}\frac{1}{2^i|z-x|^2}|k_j(z,y)|dz$$

$$\int_{|z-y|<2^{-j}}+\int_{I_y\cap|z-y|>2^{-j}}|k_j(z,y)|dz$$

$$\leq \frac{1}{2^i|x-y|^2}\Big(1+\int_{|z-y|>2^{-j}}\frac{1}{2^j|z-y|^2}dz\Big)\lesssim\frac{1}{2^i|x-y|^2},$$

och

$$|\int_J\bar{k}_i(z,x)(k_j(z,y)-k_j(x,y))dz|\leq\int_J\frac{1}{2^i|z-x|^2}\cdot\frac{1}{2^j|x-y|^2}dz$$

$$\lesssim\frac{1}{2^{i+j}|x-y|^2}\int_{|z-x|>2^{-j}}\frac{dz}{|z|}\leq\frac{2^{-i}}{|x-y|^2}.$$

Alltså är

$$|k_{ij}(x,y)| \lesssim (i-j)\frac{2^{-i}}{|x-y|^2}$$

här.

Dessa uppskattningar ger

$$\int |k_{ij}(x,y)|dx \leq \int_{|x-y|<2^{-i}} 2^j dx + \int_{2^{-i}<|x-y|<2^{-j}} \frac{(i-j)2^{j-i}}{|x-y|}dx$$

$$+ \int_{2^{-j}<|x-y|<2^{i-2j}} \frac{2^{-i}}{|x-y|^2}dx + \int_{|x-y|>2^{i-2j}} \frac{1}{2^j|x-y|^2}dx \lesssim (i-j)^2 2^{j-i}.$$

■

Vi har nu tillräckligt med verktyg för att bevisa den preliminära $T1$-satsen. Tag $\varphi \in C_0^\infty$ med $\int \varphi = 1$. Låt $\varphi_t(x) = \frac{1}{t^n}\varphi(\frac{x}{t})$, sätt $P_t f = \varphi_t * f$ och definiera $Q_t f$ genom

$$\frac{1}{t}Q_t f = \frac{\partial}{\partial t}P_t f = \frac{\partial}{\partial t}\varphi_t * f.$$

Nu är

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(\frac{1}{t^n}\varphi(\frac{x}{t})\big) = -\frac{n}{t^{n+1}}\varphi(\frac{x}{t}) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{t^n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(\frac{x}{t})(-\frac{x_i}{t^2})$$

$$= \frac{1}{t}(-\frac{n}{t^n}\varphi(\frac{x}{t}) - \sum_{i=1}^n \frac{1}{t^n}\frac{x_i}{t}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(\frac{x}{t})) =: \frac{1}{t}\psi_t(x),$$

Så $Q_t f = \psi_t * f$. Om vi deriverar $\int \varphi_t = 1$ med avseende på t ser vi att $\int \psi = 0$. För dessa operatorer gäller

Lemma 5.6. $K = \lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ N\to\infty}} P_\epsilon K P_\epsilon - P_N K P_N$.

Givet lemmat har vi

$$\begin{aligned} K &= \lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ N\to\infty}} P_\epsilon K P_\epsilon - P_N K P_n = \lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ N\to\infty}} \int_\epsilon^N \frac{\partial}{\partial t}(P_t K P_t)dt \\ &= \lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ N\to\infty}} \int_\epsilon^N (Q_t K P_t + P_t K Q_t)\frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

Låt oss koncentera oss på den första termen. Sätt

$$K_j = \int_{2^{-j}}^{2^{-j+1}} Q_t K P_t \frac{dt}{t}$$

Vi skall bevisa att $\sum_{j=-\infty}^{\infty} K_j : L^2 \to L^2$ genom att verifiera villkoren i Lemma 2 för motsvarande kärna k_j. För att upskatta k_j:s kärna observerar vi först att $Q_t K P_t$ är associerad till kärnan

$$l_t(x,y) = \frac{1}{2}\int\int [\varphi_t(\eta - x)\psi_t(y-\xi) - \varphi_t(\xi - x)\psi_t(y-\eta)]k(\xi,\eta)d\xi d\eta \quad (5.4)$$

För att se det skriver vi

$$< Q_t K P_t f, g > = < K P_t f, Q_t^* g >$$
$$= \frac{1}{2}\int\int [P_t f(y) Q_t^* g(x) - P_t f(x) Q^* g(y)]k(x,y)dxdy.$$

Nu är

$$P_t f(y) Q_t^* g(x) - P_t f(x) Q_t^* g(y) =$$
$$= \int\int \{f(u)\varphi_t(y-u)g(v)\psi_t(v-x) - f(u)\varphi_t(x-u)g(v)\psi_t(v-y)\}dudv,$$

och Fubinis sats ger

$$< Q_t K P_t f, g > = \frac{1}{2}\int\int f(u)g(u)dudv$$
$$\times \int\int \{\varphi_t(y-u)\psi_t(v-x) - \varphi_t(x-u)\psi_t(v-y)\}k(x,y)dxdy.$$

Om vi sätter $u = \xi - x, v = \eta - x$ i (5.4) får vi

$$\begin{aligned} l_t(x,y) &= \frac{1}{2}\int\int [\varphi_t(v)\psi_t(y-x-u) - \varphi_t(u)\psi_t(y-x-u)]k(u+x, v+x)du \\ &\lesssim \int\int_{\substack{|u|<t \\ |v|<t}} \frac{1}{t^{2n}} \frac{1}{t|u-v|^{n-1}} \lesssim \frac{1}{t^n}. \end{aligned}$$

Om dessutom $|x-y| > Ct$ och C är stort nog, så har φ_t och ψ_t i (5.4) disjunkta stöd så (vi antar att $\delta = 1$ i standarduppskattningen)

$$\begin{aligned} l_t(x,y) &= \int\int \varphi_t(\eta - x)\psi_t(y-\xi)k(\xi,\eta)d\xi d\eta = \\ &= \int\int \varphi_t(\eta - x)\psi_t(y-\xi)(k(\xi,\eta) - k(y,\eta))d\xi d\eta \\ &\lesssim \frac{1}{t^{2n}}\int\int_{\substack{|y-\xi|<t \\ |\eta - x|<t}} \frac{|\xi - y|}{|\xi - \eta|^{n+1}} d\xi d\eta \lesssim \\ &\lesssim \frac{1}{t^{2n}|x-y|^{n+1}} t^{2n+1} = \frac{t}{|x-y|^{n+1}}, \end{aligned}$$

eftersom $|\xi-\eta| \sim |x-y|$ då $|x-y| >> t$.

Vi har alltså visat

Lemma 5.7.

$$|l_t(x,y)| \lesssim p_t(x,y) = \frac{1}{t^n}\frac{1}{(1+\frac{|x-y|}{t})^{n+1}} = \frac{t}{(t+|x-y|)^{n+1}}.$$

Detta ger

$$|k_j(x,y)| \leq \int_{2^{-j}}^{2^{-j+1}} |l_t(x,y)|\frac{dt}{t} \lesssim \frac{2^{jn}}{(1+2^j|x-y|)^{n+1}} \tag{5.5}$$

Övning 5.4. Visa uppskattningen för ∇k_j!

Vidare är $\int k_j(x,y)dy = \int k_j(x,y)dx = 0$ ty $Q_tKP_t1 = Q_tK1 = Q_tc = 0$ eftersom $\int \psi_t = 0$ och alltså $K_j1 = 0$. Dessutom är $(Q_tKP_t)^*1 = P_t^*KQ_t^*1 = P_t^*K0 = 0$, dvs. $K_j^*1 = 0$. Följdsats 5.4 ger $\sum K_j : L^2 \to L^2$.

Det återstår endast att ge

Bevis av Lemma 5.6. 1. $P_\epsilon KP_\epsilon f \to f$ i $\mathcal{D}'$:

Vi skall visa att $< P_\epsilon KP_\epsilon f, g > \to < Kf, g >$. Men $< P_\epsilon KP_\epsilon f, g >= < KP_\epsilon f, P_\epsilon^t g >$. Nu gäller $P_\epsilon f \to f$ i $\mathcal{D}$ och $P_\epsilon^t g \to g$ i $\mathcal{D}$. Eftersom $K : C_0^\infty \to \mathcal{D}'$ får vi $KP_\epsilon f \to Kf$ i $\mathcal{D}$ och vi är klara eftersom $u_n \to u$ i $\mathcal{D}', \varphi_n \to \varphi$ i $\mathcal{D}$ medför $< u_n, \varphi_n > \to < u, \varphi >$. Detta är ett känt icke-trivialt resultat från distributionsteorin; beviset bygger på Banach-Steinhaus sats.

2. $P_NKP_N \to 0 \in \mathcal{D}'$:

$< P_NKP_Nf, g >=< KP_Nf, P_{Ng}^* > \lesssim \frac{1}{N^n} \to 0$ eftersom K är svagt begränsad.

■

Vi avlutar med några konsekvenser av beviset ovan. Observera att

$$l_t(x,y) =< K\varphi_t(\cdot - x), \check{\psi}_t(\cdot - y) >,$$

så vi har visat att om K har antisymmetrisk kärna så gäller

$$| < K\varphi_t(\cdot - x), \psi_t(\cdot - y) > | \lesssim \frac{1}{t^n} \tag{5.6}$$

Definition 5.8. *En (godtycklig) singulär integraloperator som uppfyller (5.6) kallas* svagt begränsad.

Vi har alltså visat att en operator med antisymmetrisk kärna är svagt begränsad. Argumentet för att uppskatta $l_t(x,y)$ då $|x-y| > Ct$ fungerar också för antisymmetriska K och vi har därför bevisat

Proposition 5.9. *Låt K vara en singulär integraloperator som är svagt begränsad. Om $K1 = K^*1 = 0$ i BMO så är K begränsad på L^2.*

6. BMO

Vi påminner om definitionen av BMO. Om f_Q är medelvärdet över den axelparallella kuben Q så gäller

$$f \in BMO(\mathbb{R}^n) \quad \text{om} \quad f \in L^1_{lok} \quad \text{och}$$

$$\sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |f - f_Q| = \|f\|_* = \|f\|_{BMO} < \infty.$$

Eftersom $\|\text{konst.}\|_* = 0$ måste vi arbeta modulo konstanter för att få en norm.

Övning 6.1. Visa att BMO är ett Banachrum.

För att visa att $f \in BMO$ är följande enkla resultat mycket användbart.

Lemma 6.1. *Antag att det finns c_Q med*

$$\sup_Q \int_Q |f - c_Q| = M < \infty.$$

Då gäller $\|f\|_* \leq 2M$.

Bevis. Vi har

$$f_Q - c_Q = \frac{1}{|Q|} \int_Q f - c_Q,$$

så

$$|f_Q - c_Q| \leq \frac{1}{|Q|} \int_Q |f - c_Q| \leq M$$

och alltså

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |f - f_Q| \leq \frac{1}{|Q|} |f - c_Q| + |f_Q - c_Q| \leq 2M.$$

■

Anmärkning 6.1. Det bästa valet av c_Q är medianen: Om $\int_Q |f - c|$ har minimum för c så gäller

$$0 = \frac{d}{dc} \int_Q |f - c| = \int_Q \operatorname{sgn}|f - c|.$$

□

Övning 6.2. Visa att om $f \in \mathrm{BMO}$ så $|f| \in \mathrm{BMO}$ och $\||f|\|_* \leq 2\|f\|_*$.

Lemma 6.2. *Om $Q_1 \subset Q_2$ och $|Q_2| < C|Q_1|$ så är $|f_{Q_1} - f_{Q_2}| \leq C\|f\|_*$.*

Bevis. $f_{Q_1} - f_{Q_2} = \frac{1}{|Q_1|} \int_{Q_1} f - f_{Q_2}$, så

$$|f_{Q_1} - f_{Q_2}| \lesssim \frac{|Q_2|}{|Q_1|} \frac{1}{|Q_2|} \int_{Q_2} |f - f_{Q_2}| \leq C\|f\|_*.$$

■

Följdsats 6.3.

1. Om $Q \subset \tilde{Q}$ så är $|f_Q - f_{\tilde{Q}}| \leq C \log \frac{|\tilde{Q}|}{|Q|} \|f\|_*$.

2. Om $|Q| = |\tilde{Q}|$ och $d = dist(Q, \tilde{Q})$ så gäller

$$|f_Q - f_{\tilde{Q}}| \leq C \log \frac{d}{|Q|} \|f\|_*.$$

Bevis.

1. Vi kan hitta $Q = Q_0 \subset \ldots \subset Q_n = \tilde{Q}$ där $|Q_{i+1}| < 2|Q_i|$. Det behövs $n \sim \log \frac{|\tilde{Q}|}{|Q|}$ sådana kuber. Lemmat ger

$$|f_Q - f_{\tilde{Q}}| \leq \sum_{k=1}^{n} |f_{Q_k} - f_{Q_{k-1}}| \lesssim Cn\|f\|_*.$$

2. Använd a) på $f_Q - f_K$ och $f_{\tilde{Q}} - f_K$ där K är den minsta kub som innehåller
Q och $\tilde{Q}$. Då är $K : s$ sida $\leq Cd$.

■

Att $f \in BMO$ inte bara är ett villkor på f:s storlek framgår tydligt av

Övning 6.3. Visa att

1. $\log |x| \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R})$,
2. $\mathrm{sgn} x \log |x| \notin \mathrm{BMO}(\mathbb{R})$.

Vi skall nu visa att BMO kan definieras med hjälp av Poissonkärnan (och andra approximativa identieter) i stället för medelvärden med avseende på karakteristiska funktioner. Vi påminner om Poissonkärnan i $\mathbb{R}^n$;

$$p_y(x) = c_n \frac{y}{(y^2 + |x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}, \; p_z(t) = c_n \frac{y}{(y^2 + |x-t|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

och

$$Pf(z) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t) p_z(t) dt = p_y * f(x), \quad z = (x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}_+.$$

Sats 6.4. $f \in BMO(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(t)dt}{(1+|t|^2)^{\frac{n+1}{2}}} < \infty$$

och

$$\sup_{z \in \mathbb{R}^2_+} \int_{\mathbb{R}^n} |f(t) - Pf(z)| p_z(t) dt = A < \infty;$$

och $A \sim \|f\|_*$.

Anmärkning 6.2. Det är svårare att visa Sats 6.4 än att visa att $Mf \sim P^*f$. För det senare behöver vi bara observera att $\chi_1 \lesssim p_1$ och $p_1 \lesssim \sum c_k \chi_k$ där $\sum c_k < \infty$. Så att $Mf \sim P^*f$ beror bara på storleken hos Poissonkärnan, men för att bevisa Sats 6.4 måste vi också ta hänsyn till kancelation. □

Bevis. $\Leftarrow$ (Det lätta hållet): Låt $z = (x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}_+$ och låt Q vara kuben som är centrerad i x och har sidan $2y$. På grund av Lemma 6.1 räcker det att visa

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |f - Pf(z)| \lesssim \int |f(t) - Pf(z)| p_z(t) dt.$$

Vi kan anta att $x = 0$. Observera att $\chi_Q \lesssim |Q| p_y(t)$. Så

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |f - Pf(z)| \lesssim \frac{1}{|Q|} \int |f - Pf(z)| |Q| p_y(t)$$
$$= \int |f - Pf(z)| p_z(t) dt \le A.$$

$\Rightarrow$ (Det (lite) svåra hållet): Vi kan att $x = 0$ ($z = (x, y)$). Låt Q_0 vara centrerad i origo och ha sidan $2y$. Sätt $Q_k = 2^k Q$. Observera att

$$p_y(t) \lesssim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k (2^k y)^n} \chi_{Q_k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{1}{|Q_k|} \chi_{Q_k}.$$

Med hjälp av Följdsats 6.3 får vi

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(t) - f_{Q_0}| p_y(t) dt \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k |Q_k|} \int_{Q_k} |f(t) - f_{Q_0}| dt$$
$$\lesssim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k |Q_k|} \int_{Q_k} |f(t) - f_{Q_k}| dt + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} |f_{Q_0} - f_{Q_k}|$$
$$\le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \{\|f\|_* + k\|f\|_*\} \le C\|f\|_*.$$

Detta ger

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(t)|}{(1+|t|^2)^{\frac{n+1}{2}}} < \infty \tag{6.1}$$

och

$$|Pf(z) - f_{Q_0}| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(t) - f_{Q_0}| p_z(t) dt \lesssim \|f\|_*.$$

Slutligen,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(t) - Pf(z)| p_z(t) \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(t) - f_{Q_0}| p_z(t) + |Pf(z) - f_{Q_0}| \lesssim \|f\|_*.$$

■

Anmärkning 6.3. I satsen kan Poissonkärnan ersättas med andra approximativa identiteter.

□

Anmärkning 6.4. (6.1) visar att om $f \in BMO$ så kan inte f växa för fort i ∞. □

Vi skall strax se att f inte heller kan bli stor lokalt.

Exempel. Antag att stöd $f \subset [0,1]$ och att f är avtagande. Låt $I_k = [2^{-k}, 2 \cdot 2^{-k}]$. Då är $(0,1] = \cup_{k=1}^{\infty} I_k$, och $|f_{I_k} - f_{I_1}| \leq Ck$ på grund av Följdsats 6.3 (jämför f_{I_k} och f_{I_1} med $f_{[2^{-k},1]}$). Så $|f_{I_k}| \leq |f_{I_1}| + Ck$. Om $x \in I_k$ så är $f(x) \leq f_{I_{k+1}} \lesssim Ck$, och alltså $f(x) \leq C \log \frac{1}{x}$. □

Att detta gäller i allmänhet är innehållet i

Sats 6.5. *(John-Nirenbergs sats) Om $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ så gäller*

$$|\{x \in Q; |f - f_Q| > \lambda\}| \leq C|Q| \exp\left(\frac{-c\lambda}{\|f\|_*}\right).$$

Bevis. Vi kan anta att $\|f\|_* = 1$. Calderon-Zygmunduppdela $u = |f - f_Q|$ på nivån $\alpha = \frac{3}{2}$. Vi får kuber Q_j^1 med disjunkt inre och

1. $|f - f_Q| \leq \frac{3}{2}$ n.ö. på $Q \setminus \cup_j Q_j^1$,
2. $|f_{Q_j^1} - f_Q| \leq \frac{1}{|Q_j^1|} \int_{Q_j^1} |f - f_Q| \leq \frac{3C}{2}$
och
3. $\sum |Q_j^1| \leq \frac{2}{3} \int_Q |f - f_Q| \leq \frac{2}{3}|Q|$.

Vi upprepar nu detta på varje Q_j^1, med $\alpha = \frac{3}{2}$ och $u = |f - f_{Q_j^1}|$. Vi får

1. $|f - f_Q| \leq 2 \cdot \frac{3C}{2}$ n.ö. på $Q \setminus \cup_j Q_k^2$,
2. $|f_{Q_k^2} - f_Q| \leq 2 \cdot \frac{3C}{2}$
och
3.$\sum |Q_k^2| \leq (\frac{2}{3})^2 |Q|$.

Argument:

1. Om $x \notin \cup Q_j^1$ så $|f(x) - f_Q| \leq \frac{3}{2}$; om $x \in Q_j^1$ så $|f(x) - f_Q| \leq |f(x) - f_{Q_j^1}| + |f_{Q_j^1} - f_Q| \leq \frac{3}{2} + \frac{3C}{2}$.
2. $|f_{Q_k^2} - f_Q| \leq |f_{Q_k^2} - f_{Q_j^1}| + |f_{Q_j^1} - f_Q| \leq \frac{1}{|Q_k^2|} \int_{Q_k^2} |f - f_{Q_j^1}| + |f_{Q_j^1} - f_Q| \leq 2 \cdot \frac{3C}{2}$ och
3. $\sum |Q_k^2| = \sum_j \sum_{k; Q_k^2 \subset Q_j^1} |Q_k^2| \leq \sum_j \frac{2}{3} \int_{Q_j^1} |f - f_{Q_j^1}| \leq \frac{2}{3} \sum_j |Q_j^1| \leq (\frac{2}{3})^2 |Q|$.

Upprepar vi detta har vi efter n steg kuber Q_k^n med

1. $|f - f_Q| \leq n \cdot \frac{3C}{2}$ n.ö. på $Q \setminus \cup_k Q_k^n$,
$\big($2.$|f_{Q_k^n} - f_Q| \leq n \cdot \frac{3c}{2},\big)$
och
3. $\sum_k |Q_k^n| \leq (\frac{2}{3})^n |Q|$.

Om nu $n \cdot \frac{3C}{2} < \lambda \leq (n+1)\frac{3C}{2}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ så är

$$\begin{aligned} &|\{x \in Q; |\varphi(x) - \varphi_Q| > \lambda\}| \leq \\ &\leq \sum |Q_k^n| \leq (\frac{2}{3})^n |Q| = e^{-c\lambda} |Q|. \end{aligned}$$

Om $\lambda \leq n \cdot \frac{3C}{2}$, så är

$$\begin{aligned} &|\{x \in Q; |\varphi(x) - \varphi_Q| > \lambda\}| \leq |Q| \\ &\leq e^{c\lambda} e^{-c\lambda} |Q| \leq e^{cn\frac{3C}{2}} e^{-c\lambda} |Q| \leq C e^{-c\lambda} |Q| \end{aligned}$$

■

Följdsats 6.6. *(Ekvivalent definition av BMO) Låt*

$$\|f\|_{*,p} = \sup_Q \big(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f - f_Q|^p \big)^{1/p}, \; 1 < p < \infty.$$

Då är f i BMO omm $\|f\|_{*,p} < \infty$ och $\|f\|_* \sim \|f\|_{*,p}$.

Bevis. Jensens olikhet ger om $p > 1$ att

$$\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q| dx\Big)^p \le \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|^p dx$$

eller

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f - f_Q| \le \Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f - f_Q|^p\Big)^{1/p}.$$

Den omvända olikheten följer med John-Nirenbergs sats,

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f - f_Q|^p = \frac{1}{|Q|}\int_0^\infty p\lambda^{p-1}|\{x \in Q; |f(x) - f_Q| > \lambda\}| d\lambda$$

$$\le C\int_0^\infty p\lambda^{p-1}\exp\Big(-\frac{c\lambda}{\|f\|_*}\Big) d\lambda = (\text{Sätt } u = \tfrac{c\lambda}{\|f\|_*}) =$$

$$= Cp\frac{\|f\|_*}{c}\int_0^\infty \Big(\frac{\|f\|}{c}\Big)^{p-1} u^{p-1} e^{-u} du = Cp\frac{\|f\|_*^p}{c^p}\Gamma(p),$$

dvs.

$$\|f\|_{*,p} \le (Cp\Gamma(p))^{1/p}\frac{\|f\|_*}{c}.$$

■

Följdsats 6.7. $f \in BMO \Leftrightarrow$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(t)|^2}{(1 + |t|^2)^{\frac{n+1}{2}}} dt < \infty$$

och

$$\sup_{y>0}\int_{\mathbb{R}^n} |f(t) - Pf(z)|^2 p_z(t) = B < \infty;$$

och $B^{1/2} \sim \|f\|_*$

Övning 6.4. Bevisa det! (Ledning. Jämför med beviset av Sats 6.4.)

Sats 6.8. *Om K är en singulär integraloperator som är begränsad på L^2 så gäller*

$$K : L^\infty \to BMO.$$

Bevis. Jag gör beviset bara då $K = H$ är Hilberttransformen. Jag skall också visa att $H : BMO \to BMO$.

Första problemet är att definiera H på L^∞. Vi har tidigare definierat H1. Om vi definierar Hf, $f \in L^\infty$, på liknande sätt så gäller

Lemma 6.9. *Om $f \in L^\infty$ så är*

$$Hf(x) = pv\int \frac{f(y)\chi(y)}{x-y}dy + \int f(y)(1-\chi(y))(\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x_0-y})dy,$$

där $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ och $\chi = 1$ nära x_0.

Observera att bägge termerna är väldefinierade; den första eftersom $f\chi \in L^2$, den andra är absolutkonvergent om $x \approx x_0$.

Låt oss tro på Lemma 6.9 (jag bevisar det senare), och visa att $H : L^\infty \to BMO$.

Fixera $I = I_d(x_0)$ och tag $\chi \in C_0^\infty$ med $\chi = 1$ på $2I$ och stöd $\chi \subset 3I$. Kalla de två termerna i Lemmat Hf_1 och Hf_2. Då är $Hf = Hf_1 + Hf_2$ och

$$\big(\frac{1}{|I|}\int_I |Hf_1(x)|dx\big)^2 \leq \frac{1}{|I|}\int_I |Hf_1(x)|^2 dx \leq \frac{1}{|I|}\int_{\mathbb{R}} |Hf_1(x)|^2 dx$$

$$\leq (H : L^2 \to L^2) \lesssim \frac{1}{|I|}\int_{\mathbb{R}} |f_1(x)|^2 dx \leq \|f\|_\infty^2 \frac{1}{|I|}|3I| \lesssim \|f\|_\infty^2.$$

För Hf_2 observerar vi att om $x \in I, y \notin 2I$ så är

$$|\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x_0-y}| \lesssim \frac{|x-x_0|}{|x_0-y|^2} \leq \frac{d}{|x_0-y|^2}$$

så

$$|Hf_2| \lesssim \int |f(y)||1-\chi(y)|\frac{d}{|x_0-y|^2}dy$$

$$\lesssim \|f\|_\infty d \int_{|y-x_0|>2d} \frac{dy}{|y-x_0|^2} \lesssim \|f\|_\infty.$$

∎

Bevis av Lemma 6.9. Vi definierar först Hf som ett element i $\mathcal{D}_0$ då $f \in L^\infty$. Om $\varphi \in \mathcal{D}_0$ och stöd $\varphi \subset I$, låt $\chi \in C_0^\infty$ med $\chi = 1$ på $2I$. Skriv $f = \chi f + (1-\chi)f = f_1 + f_2$. $f_1 \in L^2$ så Hf_1 är väldefinierad. Eftersom H är antisjälvadjungerad vill vi ha

$$< Hf_2, \varphi >= - < f_2, H\varphi > . \tag{6.2}$$

Högerledet är konvergent (vi skall strax bevisa det, eller jämför med definitionen av H1), och (6.2) definierar $Hf_2 \in \mathcal{D}_0'$.

Låt oss kalla uttrycket i Lemma 6.9 för $H_{\chi,x_0}f$ (där $x_0 \in \{\chi = 1\}$). Vi visar först att $H_{\chi,x_0}f(x) = H_{\tilde{\chi},\tilde{x}_0}f(x) + \text{konst.}$, så $H_{\chi,x_0}f$ är väldefinierad i BMO och beror inte på valet av χ, x_0:

Först observerar vi att $H_{\chi,x_1}f(x) = H_{\chi,x_2}f(x)$+konst. $(x_1, x_2 \in \{\chi = 1\})$, ty

$$\begin{aligned} H_{\chi,x_2}f(x) &= H_{\chi,x_2}f(x) + \int (1-\chi)f(y)(\frac{1}{x_1-y} - \frac{1}{x_2-y}) \\ &= H_{\chi,x_2}f(x) + \text{konst.} \end{aligned}$$

Vidare är $H_{\chi,x_0}f(x) = H_{\tilde{\chi},x_0}f(x) + \text{konst.}$, eftersom

$$H_{\chi,x_0}f(x) = H_{\tilde{\chi},x_0}f(x) + \int (\tilde{\chi}(y) - \chi(y))f(y)\frac{dy}{y_0-y},$$

och integralen är konvergent. Det allmänna fallet följer från detta, ty om χ_i, x_i är givna, tag $\chi \in C_0^\infty$ med $\chi = 1$ på $\cup$ stöd χ_i. Då är

$$H_{\chi_1,x_1}f(x) = H_{\chi,x_1}f(x) = H_{\chi,x_2}f(x) = H_{\chi_2,x_2}.$$

Så när vi skall verifiera att $H_{\chi,x_0}f = Hf$ kan vi välja χ, x_0 adapterade till φ. Då gäller

$$< H_{\chi,x_0}f_2, \varphi >= \int H_{\chi,x_0}f_2(x)\varphi(x)dx$$

$$= \int \varphi(x)dx \int f(y)(1-\chi(y))(\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x_0-y})dy$$

$$= \int\int f(y)(1-\chi(y))\varphi(x)(\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x_0-y})dxdy$$

Observera att integralen är absolutkonvergent så Fubini är OK.

Vi har också, eftersom $\int \varphi = 0$,

$$< Hf_2, \varphi >= - < f_2, H\varphi >= - \int f_2(y)H\varphi(y)dy$$

$$= \int f(y)(1-\chi(y))dy \int (\frac{1}{y-x} - \frac{1}{y-x_0})\varphi(x)dx$$

$$= \int\int (f(y)(1-\chi(y))\varphi(x)(\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x_0-y})dxdy.$$

■

Anmärkning 6.5. Lemma 6.9 definierar Hf också då $f \in BMO$. □

Övning 6.5. Visa det! Ledning. $f \in BMO \Rightarrow \int \frac{|f(t)|}{1+t^2}dt < \infty$.

Proposition 6.10. $H : BMO \to BMO$.

Bevis. Låt I vara ett givet intervall. Tag $\chi = 1$ på $2I$, stöd $\chi \subset 3I$ som ovan. Skriv

$$f = (f - f_{3I})\chi + (f - f_{3I})(1 - \chi) + f_{3I}.$$

$Hf_{3I} = 0$, så $Hf = Hf_1 + Hf_2$ där

$$Hf_1(x) = pv \int \frac{(f(y) - f_{3I})\chi(y)}{x - y} dy$$

och

$$Hf_2(x) = \int (f(y) - f_{3I})(1 - \chi(y))(\frac{1}{x - y} - \frac{1}{x_0 - y})dy.$$

Som ovan räcker L^2-begränsning för att uppskatta Hf_1:

$$(\frac{1}{|I|}\int_I |Hf_1(x)|^2) \lesssim \frac{1}{|I|}\int |Hf_1(x)|^2 dx$$

$$\lesssim (H : L^2 \to L^2) \lesssim \frac{1}{|I|}\int |f_1(x)|^2 dx \lesssim \frac{1}{|I|}\int_{3I} |f - f_{3I}|^2 dx$$

$$\lesssim \big(\text{Korr. till John-Nirenberg}\big) \lesssim \|f\|_*^2.$$

För att upskatta Hf_2 sätter vi

$$A = \frac{1}{|I|}\int_I |Hf_2(x) - (Hf_2)_I| dx.$$

Nu är

$$(Hf_2)_I = \frac{1}{|I|}\int_I Hf_2(t)dt$$

$$= \frac{1}{|I|}\int_I dt \int (f(s) - f_{3I})(1 - \chi(s))(\frac{1}{t - s} - \frac{1}{x_0 - s})ds.$$

Så

$$Hf_2(x) - (Hf_2)_I = \frac{1}{|I|}\int_I Hf_2(x)dt - (Hf_2)_I$$

$$= \frac{1}{|I|}\int_I dt \int_{s\in\mathbb{R}} (f(s) - f_{3I})(1 - \chi(s))\big(\frac{1}{x - s} - \frac{1}{t - s}\big)ds$$

och alltså

$$A \lesssim \frac{1}{|I|^2}\int_{t\in I}\int_{x\in I}\int_{s\in\mathbb{R}} |f(s) - f_{3I}|(1 - \chi(s))|\frac{1}{x - s} - \frac{1}{t - s}| dt dx ds.$$

Men om $x, t \in I$, $s \notin 2I$ så är

$$|\frac{1}{x - s} - \frac{1}{t - s}| \le \frac{|x - t|}{|x - s|^2} \lesssim \frac{d}{|s - x_0|^2}$$

och vi får

$$|A| \lesssim d \int_{(3I)^c} \frac{|f(s) - f_{3I}|}{|s - x_0|^2} ds \leq C\|f\|_*.$$

■

Den sista olikheten följer av

Lemma 6.11. *Låt* $Q = Q_d(x_0)$ *och* $\alpha > 0$. *Då gäller*

$$\int_{Q^c} \frac{|f(x) - f_Q|}{|x - x_0|^{n+\alpha}} \lesssim \frac{\|f\|_*}{d^\alpha}.$$

Övning 6.6. Bevisa det!

7. Littlewood-Paleyteori och Carlesonmått

Vårt nästa mål är att bevisa att $y|\nabla Pf|^2$ är ett Carlesonmått om $f \in BMO$. Vi börjar med att definiera Littlewood-Paleys g-funktion.

Definition 7.1.

$$g(f)^2(x) = \int_0^\infty y|\nabla_{x,y} Pf(x,y)|^2 dy, \; x \in \mathbb{R}^n.$$

Då gäller

Sats 7.2.

$$\|g(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \; 1 < p < \infty.$$

Anmärkning 7.1. Den omvända olikheten gäller också. □

På grund av Poissonkärnans utseende är det lätt att verifiera att $\frac{\partial}{\partial x_i} p_y(x)$ och $\frac{\partial}{\partial y} p_y(x)$ alla är av formen $\frac{1}{y}\psi_y(x)$ där $\int \psi = 0$ och

$$|\psi(x)| + |\nabla\psi(x)| \lesssim \frac{1}{(1 + |x|)^{n+1}}.$$

Låt oss ändra normalisering och sätta $Qf(x,y) = \psi_y * f(x)$ där ψ är som ovan och

$$\tilde{g}(f)^2(x) = \int_0^\infty |Qf(x)|^2 \frac{dy}{y}.$$

Sats 7.2 är en omedelbar följd av

Sats 7.3. *Om* $\int \psi = 0$ *och*

$$|\psi(x)| + |\nabla\psi(x)| \lesssim \frac{1}{(1+|x|)^{n+1}}.$$

så gäller

$$\|\tilde{g}(f)\|_p \lesssim \|f\|_p,\ 1 < p < \infty.$$

Bevis. För våra syften är det tillräckligt att visa detta då $p = 2$, men vi ger beviset för alla p.

Då $p = 2$ kan vi använda Parsevals identitet. Om vi Fouriertransformerar i x-variabeln får vi

$$\begin{aligned}
\|\tilde{g}(f)\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_0^\infty |\psi_y * f(x)|^2 \frac{dy}{y} \\
&= \int_0^\infty \frac{dy}{y} \int_{\mathbb{R}^n} |\psi_y * f(x)|^2 dx \\
&= \int_0^\infty \frac{dy}{y} \int |\hat{\psi}(y\xi)\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \int_0^\infty |\hat{\psi}(y\xi)|^2 \frac{dy}{y}.
\end{aligned}$$

Att $\int \psi = 0$ ger $\hat{\psi}(0) = 0$ och

$$|\hat{\psi}(\xi)| \lesssim \frac{|\xi|}{(1+|\xi|)^2}.$$

Detta ger

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty |\hat{\psi}(y\xi)|^2 \frac{dy}{y} &\lesssim \int_0^\infty \frac{(y|\xi|)^2}{(1+y|\xi|)^4} \frac{dy}{y} \\
&= \int_0^\infty \frac{s^2}{(1+s)^4} \frac{ds}{s} = C,
\end{aligned}$$

och alltså

$$\|\tilde{g}(f)\|_2^2 \lesssim \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \|f\|_2^2.$$

För att behandla fallet $p \neq 2$ skall vi uppfatta g-funktionen som en Hilbertrumsvärd singulär integraloperator. Låt H vara Hilbertrummet med norm

$$\|f\|_H^2 = \int_0^\infty |f(y)|^2 \frac{dy}{y},$$

och definiera operatorn $K : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(H)$ genom

$$Kf(x)(y) = Qf(x,y).$$

Anmärkning 7.2. Att $f \in L^p(H)$ betyder att för varje $x \in \mathbb{R}^n$ så är $f(x)$ ett element i H och

$$\|f\|_{L^p(H)}^p = \int_{\mathbb{R}^n} \|f(x)\|_H^p dx = \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty |f(x)(y)|^p \frac{dxdy}{y}.$$

□

L^2-resultatet visar att

$$\|Kf\|_{L^2(H)}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \|Qf(x,y)\|_H^2 dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty |Qf(x,y)|^2 \frac{dxdy}{y} = \|\tilde{g}(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \lesssim \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2.$$

Så $K : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(H)$. Vidare uppfyller dess kärna $k(x) = k(x)(y) = \psi_y(x)$ standarduppskattningarna; t.ex. gäller

$$\begin{aligned} \|k(x)\|_H^2 &= \int_0^\infty |\frac{1}{y^n}\psi(\frac{x}{y})|^2 \frac{dy}{y} = (\text{sätt} \quad y = t|x|) \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{|x|^{2n}} \Big|\frac{1}{t^n}\psi(\frac{x}{t|x|})\Big|^2 \frac{dt}{t} \lesssim \frac{1}{|x|^{2n}}. \end{aligned}$$

Övning 7.1. Visa att $\|\nabla k(x)\|_H \lesssim \frac{1}{|x|^{n+1}}$.

Vi kan nu upprepa argumentet från den klassiska situationen (Calderon-Zygmund uppdelning etc.) och L^p-uppskattningarna följer.

■

Om Q är en kub i $\mathbb{R}^n$ med sidan d låter vi $R = R(Q)$ vara kuben i $\mathbb{R}_+^{n+1}$ given av $R = R(Q) = Q \times (0, d)$.

Definition 7.4. *Ett positivt mått μ i $\mathbb{R}_+^n$ kallas för ett* Carlesonmått *om*

$$\mu(R) \le C|Q| = Cd^n,$$

för alla kuber Q. Måttets Carlesonnorm, *$\|\mu\|_C$, är infimum av alla C som duger.*

Sats 7.5. *Om $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ så är*

$$d\mu = |Qf|^2 \frac{dxdy}{y}$$

ett Carlesonmått och

$$\|\mu\|_C \lesssim \|f\|_{BMO}^2.$$

Bevis. Argumentet är snarlikt beviset för Sats 6.8., men något enklare eftersom det inte är något problem att definiera Qf. Låt Q vara en given kub och skriv

$$\begin{aligned} f &= f_{2Q} + (f - f_{2Q})\chi_{2Q} + (f - f_{2Q})(1 - \chi_{2Q}) \\ &= f_1 + f_0 + f_\infty. \end{aligned}$$

Eftersom $\int \psi = 0$ är $Qf_1 = 0$. Uppskattningen av Qf_0 följer med hjälp av L^2-begränsningen av $\tilde{g}$-funktionen:

$$\int_{R(Q)} |Qf_0|^2 \frac{dxdy}{y} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty |Qf_0|^2 \frac{dxdy}{y}$$

$$\lesssim \int_{\mathbb{R}^n} |f_0|^2 dx = |2Q| \cdot \frac{1}{|2Q|} \int_{2Q} |f - f_{2Q}|^2 \lesssim |Q| \|f\|_{BMO}^2,$$

där den sista olikheten följer från Följdsats 6.6.

För att uppskatta Qf_∞ observerar vi att då $x \in Q$ gäller

$$|Qf_\infty(x, y)| = |\psi_y * f(x)|$$

$$\lesssim \int_{\mathbb{R}^n \setminus 2Q} \frac{y}{(y + |x - u|)^{n+1}} |f_\infty(u)| du.$$

Så om $(x, y) \in R(Q)$ är enligt Övning 6.5

$$|Qf_\infty(x, y)| \lesssim y \int_{\mathbb{R}^n \setminus 2Q} \frac{|f(u) - f_{2Q}|}{|x - u|^{n+1}} du \lesssim \frac{y}{d} \|f\|_{BMO},$$

och

$$\frac{1}{|Q|} \int_{R(Q)} |Qf_\infty|^2 \frac{dxdy}{y} \lesssim \frac{1}{|Q|} \int_{R(Q)} \frac{\|f\|_{BMO}}{d} dydx = \|f\|_{BMO}.$$

■

Följdsats 7.6. *Om $f \in BMO$ så gäller*

$$\int \frac{f(x)}{1 + |x|^{n+1}} dx < \infty$$

och

$$y|\nabla Pf|^2 dxdy \text{ är ett Carlesonmått.}$$

Anmärkning 7.3. Omvändningen gäller också. □

Vi avslutar denna paragraf med några resultat om sambandet mellan Carleson- mått, Hardy-Littlewoods maximalfunktion och icke-tangentiell konvergens.

Vi låter Γ_x beteckna den räta konen i $\mathbb{R}^{n+1}_+$ med spets i $x \in \mathbb{R}^n$, $\Gamma_x = \{(x, y); |x-y| < y\}$. Om u är en funktion i $\mathbb{R}^{n+1}_+$ betecknar $Nu(x) = \sup_{\Gamma_x} |u|$ dess icke-tangentiella maximalfunktion. Nästa övning visar att $NPf \lesssim Mf$.

Övning 7.2. a) Låt $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+; |x| \leq y\}$ och $\chi = \chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}$. Låt χ_y beteckna dilationerna av χ, definiera v i övre halvplanet genom $v(x, y) = \chi_y * f(x)$ och sätt

$$f^*(x) = \sup_{x+\Gamma} |v|.$$

Visa att $f^* \lesssim Mf$.

b) Generalisera till fallet då v ersätts med u där u är f:s Poissonintegral.

Vi har också

Sats 7.7. *Om μ är ett Carlesonmått och u är kontinuerlig så gäller*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty |u(x, y)|^p d\mu(x, y) \lesssim \|\mu\|_{\mathcal{C}} \int_{\mathbb{R}^n} |Nu(x)|^p$$

Bevis. Låt $B_{x,y}$ vara bollen med centrum i x och sidan y. Om $|u(x, y)| > \lambda$ så är $Nu > \lambda$ på $B_{x,y}$ och $\{x; Nu > \lambda\} = \bigcup_{|u(x,y)|>\lambda} B_{x,y}$. Lemma 2.2 ger disjunkta B_j med $\cup 3B_j \supset \{Nu > \lambda\}$. Då gäller

$$\mu\{|u(x, y)| > \lambda\} \subset \mu(\cup R(3B_j)) \leq \sum \mu(R(3B_j))$$

$$\leq (\mu \text{ Carleson}) \leq \sum |3B_j| = 3^n \sum |B_j| \leq 3^n |\{Nu > \lambda\}|.$$

Argumentet ovan är inte helt korrekt, $B_{x,y}$ är bollar och inte kuber som i definitionen av Carlesonmått, men det är lätt att rätta till. ■

Följdsats 7.8. *(Carleson-Hörmanders olikhet) Om $p > 1$ och μ är ett Carlesonmått så gäller*

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} |Pf(x, y)|^p d\mu(x, y) \lesssim \|\mu\|_{\mathcal{C}} \|f\|_p^p.$$

8. Paraprodukter och bevis av T1-satsen

Låt $\varphi, \psi \in C_0^\infty$ med $\int \varphi = 1$ och $\int \psi = 0$. Sätt $P_t f = \varphi_t * f$ och $Q_t f = \psi_t * f$. Formellt definierar vi *paraprodukten* mellan f och b genom

$$\pi(f,b) = \pi_b(f) = \int_0^\infty Q_t(Q_t b \cdot P_t f)\frac{dy}{y}. \tag{8.1}$$

För paraprodukter har vi följande resultat:

Sats 8.1. *Om $b \in BMO$ så uppfyller π_b:s kärna standarduppskattningarna.*

Sats 8.2. $\pi_b : L^2 \to L^2$.

Följdsats 8.3. *π_b är en begränsad singulär integraloperator och $\pi_b : L^p \to L^p$, $1 < p < \infty$.*

Om dessutom

$$\int_0^\infty Q_t^2 \frac{dt}{t} = Id \tag{8.2}$$

så gäller

Sats 8.4. $\pi_b(1) = b$ *och* $\pi_b^*(1) = 0$, $b \in BMO$.

Med hjälp av dessa resultat kan vi ge

Bevis av T1-satsen. Låt $b = K1$ och $b^* = K^*1$. Sätt $S = K - \pi_b - (\pi_{b^*})^*$. Enligt Sats 8.1 har S en standardkärna, och enligt Sats 8.4 gäller

$$S1 = K1 - \pi_b(1) - (\pi_{b^*})^*(1) = K1 - b - 0 = 0$$

och

$$S^*1 = K^*1 - \pi_b^*(1) - \pi_{b^*}(1) = K^*1 - 0 - b^* = 0.$$

Proposition 5.9 ger $S : L^2 \to L^2$, och enligt Sats 8.2 är också K begränsad på L^2. ■

Övning 8.1. Låt K vara en singulär integraloperator med standardkärna. Visa att

$$K1 \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n) \qquad \text{omm} \qquad \int_I |K(\chi_{3I})| \lesssim |I|.$$

En stor svårighet i beviset av Sats 8.1-4 är att ge mening åt de formella definitionerna (8.1) och (8.2). Låt oss först betrakta (8.1).

Lemma 8.5. *Låt*

$$\pi_b^{\epsilon,N}(f) = \int_\epsilon^N Q_t(Q_t b \cdot P_t f)\frac{dt}{t}.$$

Då konvergerar $\pi_b^{\epsilon,N}(f)$ *svagt i* L^2 *och*

$$|<\pi_b^{\epsilon,N}(f), g>| \lesssim \|b\|_{BMO}\|f\|_2\|g\|_2. \tag{8.3}$$

Bevis. Med hjälp av Cauchy-Schwartz olikhet får vi

$$|<\pi_b^{\epsilon,N}(f), g>| = |\int_\epsilon^N <Q_t(Q_t b \cdot P_t f), g> \frac{dt}{t}|$$

$$= |\int_\epsilon^N <Q_t b \cdot P_t f, Q_t^* g> \frac{dt}{t}| = |\int_{\mathbb{R}^n}\int_\epsilon^N Q_t b \cdot P_t f\overline{Q_t^* g}\frac{dxdt}{t}|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n}(\int_\epsilon^N |Q_t^* g|^2\frac{dt}{t})^{1/2}\cdot(\int_\epsilon^N |P_t f|^2|Q_t b|^2\frac{dt}{t})^{1/2}dx$$

$$\leq (\int_{\mathbb{R}^n}\int_\epsilon^N |Q_t^* g|^2\frac{dxdt}{t})^{1/2}\cdot(\int_{\mathbb{R}^n}\int_\epsilon^N |P_t f|^2|Q_t b|^2\frac{dxdt}{t})^{1/2}$$

$$= A^{1/2}B^{1/2}.$$

Sats 7.3 ger

$$A \leq \int_{\mathbb{R}^n}\tilde{g}(g)^2 dx \lesssim \|g\|_2^2.$$

På grund av Sats 7.5 är $|Q_t b|^2\frac{dxdt}{t}$ ett Carlesonmått μ med $\|\mu\|_C \lesssim \|b\|_{BMO}^2$ och Följdsats 7.8 ger

$$\begin{aligned} B &\lesssim \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}}|P_t f(x)|^2 d\mu(x,t) \lesssim \|\mu\|_C\|f\|_2^2 \\ &\lesssim \|b\|_{BMO}^2\|f\|_2^2, \end{aligned}$$

och (8.3) är bevisad. Vi ser också att $<\pi_b^{\epsilon,N}(f), g>$ konvergerar eftersom

$$\int_{t\notin(\epsilon,N)}|Q_t^* g|^2\frac{dt}{t} = o(1)\|g\|_2^2$$

då $\epsilon \to 0$, $N \to \infty$.

■

På grund av lemmat är alltså $\pi_b(f)$ definierat som ett svagt gränsvärde i L^2.

Bevis av Sats 8.1. Vi skall visa att π_b är en singulär integraloperator med kärnan

$$k(x,y) = \int_0^\infty \int_{z\in\mathbb{R}^n} \psi_t(x-z)Q_t b(z)\varphi_t(z-y)\frac{dzdt}{t}. \tag{8.4}$$

Låt oss först uppskatta k. Antag att stöd $\psi \subset B_1(0)$ och låt $B = B_t(x)$. Då gäller

$$|Q_t b(x)| = |\int (b(y)-b_B)\psi_t(x-y)dy|$$

$$\lesssim \frac{1}{t^n}\int_B |b(y)-b_B|dy \lesssim \frac{1}{|B|}\int_B |b(y)-b_B|dy \lesssim \|b\|_{BMO},$$

så

$$\|Q_t b\|_\infty \lesssim \|b\|_{BMO}.$$

Detta ger

$$\begin{aligned} |k(x,y)| &\lesssim \|b\|_{BMO}\int_0^\infty \frac{dt}{t}\int |\psi_t(x-z)\varphi_t(z-y)|dz \\ &\lesssim \|b\|_{BMO}\int_0^\infty \frac{dt}{t^{2n+1}}\int_{\substack{|x-z|<t\\|y-z|<t}} dz \end{aligned}$$

Genom att translatera och rotera får vi

$$\int_{\substack{|x-z|<t\\|y-z|<t}} dz = \int_{\substack{|u|<t\\|u-|x-y||<t}} du.$$

Om vi dillaterar i t-integralen får vi

$$|k(x,y)| \lesssim \int_0^\infty \frac{1}{s^{2n}t^{2n}}\frac{dt}{t}\int_{\substack{|u|<st\\|u-|x-y||<st}} du.$$

Med $s = |x-y|$ och $u = sv$ ger dettta

$$|k(x,y)| \lesssim \frac{1}{|x-y|^n}\int_0^\infty \frac{I(t)}{t^{2n}}\frac{dt}{t},$$

där

$$I(t) = \int_{\substack{|v|<t\\|v-1|<t}} dv.$$

Eftersom $I(t) = 0$ om $t < \frac{1}{2}$ och $I(t) \approx t^n$ då $t \to \infty$ så är

$$\int_0^\infty \frac{I(t)}{t^{2n}}\frac{dt}{t} < \infty$$

och alltså

$$|k(x,y)| \lesssim \frac{1}{|x-y|^n}.$$

Kalla $\pi_b^{\epsilon,N}$:s kärna $k^{\epsilon,N}$. Då är

$$k^{\epsilon,N}(x,y) = \int_\epsilon^N \int_{z\in\mathbb{R}^n} \psi_t(x-z)Q_t b(z)\varphi_t(z-y)\frac{dzdt}{t}.$$

Som ovan får vi

$$|k^{\epsilon,N}(x,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^n} \tag{8.5}$$

likformigt i ϵ, N.

Att $\pi_b \sim k$ betyder att om $f, g \in C_0^\infty$ har disjunkta stöd så är

$$< \pi_b(f), g >= \int\int k(x,y)g(x)f(y)dxdy.$$

Men

$$\begin{aligned} < \pi_b(f), g > &= \lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ N\to\infty}} < \pi_b^{\epsilon,N}(f), g > \\ &= \lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ N\to\infty}} \int\int k^{\epsilon,N}(x,y)g(x)f(y)dxdy. \end{aligned}$$

Dominerad kovergens ger nu

$$< \pi_b(f), g >= \int\int k(x,y)g(x)f(y)dxdy.$$

så $\pi_b \sim k$ där $|k(x,y)| \lesssim |x-y|^{-n}$.

Att $|\nabla k(x,y)| \lesssim |x-y|^{-(n+1)}$ visas på liknande sätt. ■

För att bevisa Sats 8.4 behöver vi tolka det formella villkoret (8.2). Vi skall också visa att vi kan välja ψ så att (8.2) är uppfyllt.

Låt

$$\begin{aligned} A_{\epsilon,N} &= < \int_\epsilon^N Q_t^2 f \frac{dt}{t}, g > \\ &= \int_\epsilon^N < Q_t f, Q_t^* g > \frac{dt}{t} = \int_{\mathbb{R}^n}\int_\epsilon^N Q_t f Q_t^* g \frac{dtdx}{t}. \end{aligned}$$

Så

$$\begin{aligned} |A_{\epsilon,N}| &\leq (\int_{\mathbb{R}^n}\int_\epsilon^N |Q_t^* g|^2 \frac{dtdx}{t})^{\frac{1}{2}} (\int_{\mathbb{R}^n}\int_\epsilon^N |Q_t f|^2 \frac{dtdx}{t})^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim (\int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{g}(g)|^2 dx)^{\frac{1}{2}} (\int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{g}(f)|^2 dx)^{\frac{1}{2}} \leq \|g\|_2 \|f\|_2 \end{aligned}$$

och

$$\lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ N\to\infty}} \int_\epsilon^N Q_t^2 f \frac{dt}{t} = \int_0^\infty Q_t^2 f \frac{dt}{t}$$

svagt i L^2.

Om vi Fourier transformerar i x-variabeln får vi

$$\begin{aligned} < \int_0^\infty Q_t^2 f \frac{dt}{t}, g > &= \lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ N\to\infty}} < \int_\epsilon^N \hat{\psi}(t\xi)^2 \hat{f}(\xi) \frac{dt}{t}, \hat{g} > \\ &= < \hat{f}(\xi) \int_0^\infty \hat{\psi}(t\xi)^2 \frac{dt}{t}, \hat{g} > . \end{aligned}$$

Om nu

$$\int_0^\infty \hat{\psi}(t\xi)^2 \frac{dt}{t} \equiv 1, \tag{8.6}$$

får vi

$$< \int_0^\infty Q_t^2 f \frac{dt}{t}, g > = < \hat{f}, \hat{g} > = < f, g >,$$

dvs.

$$\int_0^\infty Q_t^2 f \frac{dt}{t} = f = Id\, f.$$

För att få (8.6) uppfyllt väljer vi ψ radiell. Då är $\hat{\psi}$ också radiell och

$$\int_0^\infty \hat{\psi}(t\xi)^2 \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \hat{\psi}(t|\xi|)^2 \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \hat{\psi}^2(s) \frac{ds}{s} = C^2,$$

och om vi ersätter ψ med ψ/C gäller (8.6).

Bevis av Sats 8.4. Formellt är

$$\begin{aligned} \pi_b(1) &= \int_0^\infty Q_t(Q_t b \cdot P_t 1) \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^\infty Q_t(Q_t b) \frac{dt}{t} = \int_0^\infty Q_t^2 b \frac{dt}{t} = b. \end{aligned}$$

Att göra detta till ett bevis är lite besvärligt på grund av krånglet med definitionen av $\pi_b(1)$; om $\eta \in C_0^\infty$, $\int \eta = 0$ och stöd $\eta \subset B = B_r(p)$ så tog vi $\chi \in C_0^\infty$ med $\chi = 1$ på $2B$ och satte

$$< \pi_b(1), \eta > = < \pi_b(\chi), \eta > + < 1 - \chi, \pi_b^* \eta > .$$

Den första termen är väldefinierad, den andra är det också på grund av standarduppskattningarna:

Om $x \notin 2B$ så är

$$\begin{aligned}\Pi_b^*\eta(x) &\lesssim \int |k(x,y)-k(x,p)||\eta(y)|dy \\ &\lesssim \int \frac{|y-p|}{|x-p|^{n+1}}|\eta(y)|dy \lesssim \frac{1}{|x-p|^{n+1}}\end{aligned}$$

som är integrerbart mot $1-\chi(x)$. Denna uppskattning gäller också (uniformt) för $\Pi_b^{\epsilon,N}$:s kärna. Vi får därför

$$<\Pi_b(1),\eta) = \lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ N\to\infty}} <\Pi_b^{\epsilon,N}(1),\eta> .$$

För fixa ϵ, N har vi

$$\begin{aligned}\Pi_b^{\epsilon,N}(1) &= \int_\epsilon^N Q_t(Q_t b\cdot P_t 1)\frac{dt}{t} \\ &= \int_\epsilon^N Q_t^2 b\frac{dt}{t}.\end{aligned}$$

Det är inte självklart att $\Pi_b^{\epsilon,N}(1)\to b$ men

$$\int_\epsilon^N (Q_t^*)^2\eta\frac{dt}{t}\to\eta.$$

Kom ihåg att $\|Q_t b\|_\infty \lesssim \|b\|_{BMO}$. Dessutom gäller $\|Q_t^*\eta\|_1\lesssim t$, $t\to 0$, och $\|Q_t^*\eta\|_1\lesssim \frac{1}{t}$, $t\to\infty$. Skriv nu

$$\begin{aligned}<\Pi_b^{\epsilon,N}(1),\eta> &= \int_\epsilon^N <Q_t^2 b,\eta> \frac{dt}{t} \\ &= \int_\epsilon^N <Q_t b, Q_t^*\eta> \frac{dxdt}{t}.\end{aligned}$$

Denna integral är absolutkonvergent och

$$<\Pi_b(1),\eta> = \int_0^\infty <Q_t b, Q_t^*\eta> \frac{dt}{t}$$

$$= \int_0^\infty <b,(Q_t^*)^2\eta> \frac{dt}{t} = \int_{\mathbb{R}^n} b(x)dx \int_0^\infty (Q_t^*)^2\eta\frac{dt}{t}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} b(x)\eta(x)dx = <b,\eta>$$

så $\Pi_b(1)=b$ i BMO.

För adjunkten $\pi_b^*(1)$ har vi formellt

$$< \pi_b^*(1), \eta > = < 1, \pi_b(\eta) > = \int_0^\infty < 1, Q_t(Q_t b \cdot P_t \eta) > \frac{dt}{t}$$

$$= \int_0^\infty < Q_t^* 1, Q_t b \cdot P_t \eta > \frac{dt}{t} = \int_0^\infty < 0, Q_t b \cdot P_t \eta > \frac{dt}{t} = 0.$$

Detaljerna som behövs för att verifiera att denna formella kalkyl är riktig överlämnas (med glädje) till läsaren. ∎