MAN 240 : Diskret matematik

Tentamen 040602

Lösningar

F.1 Sats 10.4.

F.2 (i) Använd den giriga algoritmen för att konstruera ett minimalt spanning träd. Om vi börjar med kanten $\{j, g\}$, t.ex., då kunde vi bygga t.ex. följande träd

kant	vikt
$\{j, g\}$	2
$\{j, k\}$	4
$\{f, g\}$	6
$\{g, c\}$	6
$\{c, b\}$	6
$\{c, h\}$	7
$\{h, i\}$	6
$\{i, n\}$	2
$\{n, m\}$	2
$\{c, d\}$	8
$\{l, m\}$	8
$\{j, a\}$	9
$\{d, e\}$	10
$\{i, z\}$	10

Den totala vikten av trädet är 86. Notera att vi har olika val i flera steg och att detta inte är det unika trädet av vikt 86.

(ii) Använd BFS för att bygga upp ett träd med följande sekvens av kanter :

$$\{a, j\}, \{a, b\}, \{a, f\}, \{j, g\}, \{j, k\}, \{b, c\}, \{c, h\} \text{ eller } \{g, h\}.$$

Då ser vi att den kortaste vägen från a till h har total längd 23, och det finns två möjligheter för denna väg, nämligen $a-b-c-h$ eller $a-j-g-h$.

F.3 G är 3-regulär om och endast om varje sammanhängande komponent av G är det. WLOG, får vi därför antaga att G är sammanhängande. Låt G ha n noder. Eftersom varje nod har grad 3 då har g totalt $3n/2$ kanter. Eftersom G är sammanhängande, den har ett spanning träd T. T har $n-1$ kanter. För alla $n > 1$ har vi att $3n/2 \geq (n-1)+2$ så det finns minst två kanter av G utanför trädet T. Välj två sådana kanter, säg e och f. Delgrafen till G som består av $T \cup \{e\}$ måste då innehålla en cykel C_1 och denna cykel måste deeutom inkludera kanten e. PSS, måste delgrafen bestående av $T \cup \{f\}$ innehålla en cykel C_2 som inkluderar kanten f. Därför är C_1 och C_2 två olika cykler i G, v.s.v.

F.4 Det är inte så svårt att se att det går att hitta ett flöd genom grafen där alla tre kanter utifrån a är mättade. Ett sådant flöd måste alltså vara maximalt och $S = \{a\}$ är en minimal cut-set. Här är ett explicit exempel av ett sådant flöd f :

$$
\begin{array}{rrr}
f(a,b) = 10 & f(a,f) = 11 & f(a,j) = 9, \\
f(b,c) = 6 & f(f,b) = 8 & f(j,f) = 3, \\
f(j,k) = 4 & f(j,g) = 2 & f(f,g) = 6, \\
f(b,g) = 12 & f(g,k) = 7 & f(g,c) = 6, \\
f(c,d) = 5 & f(d,h) = 5 & f(c,h) = 7, \\
f(g,h) = 7 & f(k,h) = 11 & f(k,l) = 0, \\
 & & f(l,h) = 0.
\end{array}
$$

F.5 Sats 18.3 i Biggs.

F.6 Låt S vara en mängd med n element, säg $S = \{1,2,...,n\}$. Både leden räknar antalet par (A,B) där

(i) A är en delmängd till S och B en delmängd till A,
(ii) A har k element och B har i element.

F.7 Let

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{x^n}{n!}$$

denote the exponential generating function of the sequence (u_n). Noting that

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \frac{x^n}{n!} = xe^x,$$

we conclude that $E(x)$ satisfies the differential equation

$$E'' - 5E' + 6E = xe^x. \tag{1}$$

We find the general solution to (1) in the usual way. First, the general solution of the homogeneous equation is

$$E_h(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

A particular solution to the inhomogeneous equation will have the form

$$E_p(x) = (Ax + B)e^x.$$

Substituting into the lhs of (1) we may solve for A, B as $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{3}{4}$. Hence the general solution to (1) is

$$E(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right) e^x.$$

To solve for C_1 and C_2 we use the initial conditions

$$u_0 = E(0) = 3, \qquad u_1 = E'(0) = 4.$$

After the required computation, we find that

$$C_1 = 4, \qquad C_2 = -\frac{7}{4}.$$

We thus finally obtain the desired formula for u_n, namely

$$u_n = 4 \cdot 2^n - \frac{7}{4} \cdot 3^n + \frac{n}{2} + \frac{3}{4}.$$

F.8 Here's an explicit description of the projective plane over F_2 and of the associated $2 - (7, 3, 1)$ design : this being a $2 - (q^2 + q + 1, q + 1, 1)$ design with $q = 2$.

F_2 is the finite field of order 2. We have $F_2 = Z/2Z = \{0, 1\}$ with addition and multiplication rules

$$0+0=0, \qquad 0+1=1, \qquad 1+1=0,$$
$$0\cdot 0=0, \qquad 0\cdot 1=0, \qquad 1\cdot 1=1.$$

We have

$$V = F_2^3 = \{(x,y,z) : x,y,z \in F_2\},$$

where addition and scalar multiplication are componentwise.

The points of the design are the lines through the origin $(0,0,0)$ in V, that is, all 1-dimensional subspaces of V. There are $2^3-1=7$ non-zero elements v of V, and any such v determines a 1-dimensional subspace. We write these seven lines as

$$\begin{aligned}
\vec{1} &= (1,0,0)\\
\vec{2} &= (0,1,0)\\
\vec{3} &= (0,0,1)\\
\vec{4} &= (1,1,0)\\
\vec{5} &= (1,0,1)\\
\vec{6} &= (0,1,1)\\
\vec{7} &= (1,1,1)
\end{aligned}$$

The orthogonal complements of these spaces are the seven 2-dimensional subspaces of V. Each of these contains 3 one-dimensional subspaces. Explicitly, we have

$$\begin{aligned}
\vec{1}^\perp &\ni \{\vec{2},\vec{3},\vec{6}\},\\
\vec{2}^\perp &\ni \{\vec{1},\vec{3},\vec{5}\},\\
\vec{3}^\perp &\ni \{\vec{1},\vec{2},\vec{4}\},\\
\vec{4}^\perp &\ni \{\vec{3},\vec{4},\vec{7}\},\\
\vec{5}^\perp &\ni \{\vec{2},\vec{5},\vec{7}\},\\
\vec{6}^\perp &\ni \{\vec{1},\vec{6},\vec{7}\},\\
\vec{7}^\perp &\ni \{\vec{4},\vec{5},\vec{6}\}.
\end{aligned}$$

To check, for example, that $\vec{7}$ is orthogonal to each of $\vec{4},\vec{5},\vec{6}$, just check that the scalar product of $\vec{7}$ with each is zero. For example,

$$\vec{7}\cdot\vec{4} = (1,1,1)\cdot(1,1,0) = 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 0 = 1+1+0 = 0.$$

Hence, we get the following $2-(7,3,1)$ design

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & 1 & 1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 4 & 5 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 4 & 7 & 7 & 7 & 6 \end{array}$$