MATEMATIK	Dag : 030416 Tid : 8.45 - 13.45.
Göteborgs Universitet	Hjälpmedel : Inga
Peter Hegarty	Vakt : Johanna Pejlare 0740-350646.

Tentamenskriving i Algebraisk talteori (MAN 640)

≥ 12 poäng, inkl. inlämningsuppgifterna, ger godkännt. Denna gräns kan minskas efteråt.

1 (3p). Formulera och bevisa Möbius inversionsformel.

2 (2.5p). Låt p vara ett primtal. Utan att hänvisa till Dirichlets sats, bevisa att det finns oändligt många primtal q så att $q \equiv 1 \pmod{p}$.

3 (2p+1.5p). Låt p vara ett udda primtal och ζ en primitiv p:te enhetsrot. Sätt

$$G := \sum_{m=0}^{p-1} \left(\frac{m}{p}\right) \zeta^m.$$

(i) Beräkna G^2.
(ii) Formulera Gauβ reciprocitetslag. Med hjälp av resultaten av del **(i)**, eller på något annat sätt, bevisa lagen.

4 (1.5p+2p). **(i)** Ange alla reducerade binära kvadratiska former av diskriminant -36.
(ii) Ange alla primtal som kan representeras på formen $101x^2 + 262xy + 170y^2$, för några heltal x, y.

5 (3.5p). Låt $d > 0$ ej en perfekt kvadrat. Visa att det finns en grupp struktur på mängden av lösningarna $(x, y) \in \mathbf{Z}^2$ till ekvationen

$$x^2 - dy^2 = 1,$$

och ange (med bevis) strukturen av denna grupp.

6 (4p). Antag att F.T.A. gäller i $\mathbf{Z}[\sqrt{-1}]$. Bevisa att den Diofantiska ekvationen

$$y^2 + 4 = z^3$$

har fyra lösningar, nämligen $(\pm 11, 5)$ och $(\pm 2, 2)$.

(Tips : Dela upp analysen enligt pariteten av y).

Obs! Tentan beräknas vara färdigrättad den 22 april. Då kan den hämtas i mottagningsrummet mellan kl. 12:30-13:00. Tentamensresultat lämnas också ut per telefon 772 35 09 *efter* kl. 14:00.