Lösningar till Mittentan, Sep. 21

1(a) $f_x = 2x - 2$ och $f_y = -2y + 4$. I en kritisk punkt gäller $f_x = f_y = 0$ så vi ser direkt att $(1, 2)$ är den enda sådana punkten. Dessutom har vi $f_{xx} = 2$, $f_{yy} = -2$, $f_{xy} = 0$. Eftersom $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = -4 < 0$ så är den kritiska punkten en sadelpunkt.

(b) Enligt kedjeregeln är

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{ds} = 2sf_x + 2f_y. \tag{1}$$

När vi deriverar för andra gången måste vi använda både kedjeregeln och produktregeln. Vi får

$$\frac{d^2 f}{ds^2} = 2f_x + 2s(2sf_{xx} + 2f_{xy}) + 2(2sf_{yx} + 2f_{yy}) = 2f_x + 4s^2 f_{xx} + 8sf_{xy} + 4f_{yy}. \tag{2}$$

(c) Hastigheten (velocity) ges av

$$\mathbf{r}'(t) = (-2t)\mathbf{i} + (2t)\mathbf{j}. \tag{3}$$

Farten ges sedan av

$$||\mathbf{r}'(t)|| = \sqrt{(-2t)^2 + (2t)^2} = 2\sqrt{2}\,t. \tag{4}$$

I punkten $(1/2, 1/2)$ så är $t = 1/\sqrt{2}$. Insättning i (4) innebär att farten i den punkten är 2.

Partikelns bana i xy-planet satisfierar $x = 1 - t^2$, $y = t^2$, $0 \le t \le 1$. Eftersom $y = 1 - x$ så följer banan raksträckan från $(1, 0)$ till $(0, 1)$. Från (4) ser vi att dess fart ökar linjärt med tiden. I början på färden är farten noll och i slutet är farten $2\sqrt{2}$.

2(a) Skriv $\mathbf{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y), F_3(x, y))$ där

$$F_1(x, y) = x^2 y, \quad F_2(x, y) = x \ln y, \quad F_3(x, y) = x + 2y. \tag{5}$$

Formeln för Jacobimatrisen lyder

$$D\mathbf{F}(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2xy & x^2 \\ \ln y & \frac{x}{y} \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

I punkten $(3, 1)$ gäller sedan att

$$D\mathbf{F}(3, 1) = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Lineariseringsformeln i allmänhet lyder

$$\mathbf{F}(x + h, y + k) \approx \mathbf{F}(x, y) + D\mathbf{F}(x, y) \cdot [h\ k]^T, \tag{8}$$

där $\cdot$ betecknar en matrisprodukt. Här är $(x, y) = (3, 1)$, så

$$\mathbf{F}(3,1) = [9\ 0\ 5]^T. \tag{9}$$

Vi har $(h, k) = (0.03, -0.01)$. Insättning av (7) och (9) i (8) ger alltså

$$\mathbf{F}(3.03, 0.99) \approx \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.03 \\ -0.01 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.09 \\ -0.03 \\ 5.01 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

(b), (c) Vi har följande allmänna formel för Taylorpolynomet av grad 2 till en funktion av två variabler:

$$f(x+h, y+k) \approx f(x,y) + (hf_x + kf_y) + \frac{1}{2}\left(h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy}\right). \tag{11}$$

Här är $f(x,y) = x \ln y$, $(x, y) = (3, 1)$ och $(h, k) = (0.03, -0.01)$. Vi beräknar

$$f_x = \ln y, \quad f_y = \frac{x}{y}, \quad f_{xx} = 0, \quad f_{xy} = \frac{1}{y}, \quad f_{yy} = -\frac{x}{y^2}. \tag{12}$$

I punkten $(3, 1)$ gäller därmed att

$$f_x = 0, \quad f_y = 3, \quad f_{xx} = 0, \quad f_{xy} = 1, \quad f_{yy} = -3. \tag{13}$$

Insättning i (11) ger

$$\begin{aligned} f(3.03, 0.99) &\approx 0 + [(0.03)(0) + (-0.01)(3)] + \frac{1}{2}\left[(0.03)^2(0) + 2(0.03)(-0.01)(1) + (-0.01)^2(-3)\right] \\ &= -0.03045. \end{aligned}$$