Lösningsförslag till tentamen
TMA043 Flervariabelanalys E2

2013-08-31 kl. 8.30–12.30

Examinator: Johan Jonasson , Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Anders Martinsson , telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentan krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen tills kursen ges nästa läsår. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen, del 1

Uppgift 1 och 2 se nästa blad

Godkäntdelen, del 2

Uppgift 3, 4 och 5 se blad 3

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. Ur klotet $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$ borras ett cylindrisk hål med radien $\frac{1}{2}$. Cylinderns axel är parallell med z-axeln och går genom punkten $(\frac{1}{2}, 0, 0)$. Beräkna volymen av den del av klotet som återstår. (6p)

Lösning: Volymen av ett klot med radien 1 är $4\pi/3$ (om man inte kan det utantill så är det heller inte så svårt att beräkna det t.ex. genom övergång till sfärsika koordinater). Vi behöver således bara beräkna volymen av det urborrade hålet och av symmetriskäl räcker det att bestämma volymen V av den del Ω av detta hål som ligger i första okatanten och sedan multiplicera med 4. Notera att $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 \le \frac{1}{4} \;\Leftrightarrow\; x^2 + y^2 \le x$ som i cylindriska koordinater $(x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z)$ är detsamma som att $r \le \cos\theta$. Vi får då;

$$V = \iiint_\Omega dV = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\cos\theta}\int_0^{\sqrt{1-r^2}} r\,dzdrd\theta = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\cos\theta} \sqrt{1-r^2}\,r\,drd\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\left[\frac{-1}{3}(1-r^2)^{3/2}\right]_0^{\cos\theta} d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}(1-\sin^3\theta)\,d\theta = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2\theta)\sin\theta\,d\theta =$$

$$= \begin{bmatrix} u = \cos\theta \\ du = -\sin\theta\,d\theta \end{bmatrix} = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3}\int_1^0 (1-u^2)\,du = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3}\left[u - \frac{u^3}{3}\right]_1^0 = \frac{\pi}{6} - \frac{2}{9}$$

Volymen av det urborrade klotet är således $\dfrac{4\pi}{3} - 4\left(\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{2}{9}\right) = \dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{8}{9}$

Svar: Volymen är $\dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{8}{9}$

7. Låt $\mathcal{C}$ vara kurvan som ges av parametriseringen $\mathbf{r} = 2\cos t\,\mathbf{i}+2\sin t\,\mathbf{j}+2\sin 2t\,\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2\pi$ och låt $\mathbf{F}$ vara vektorfältet $\mathbf{F}(x,y,z) = (e^x - y^3)\mathbf{i} + (e^y + x^3)\mathbf{j} + e^z\mathbf{k}$. Visa att kurvan $\mathcal{C}$ ligger i ytan $z = xy$ och använd Stokes sats för att beräkna kurvintegralen $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$. (6p)

Lösning: Om $x = 2\cos t, y = 2\sin t$ och $z = 2\sin 2t$ så är;

$$xy = 2\cos t 2\sin t = 2\sin 2t = z$$

vilket visar att $\mathcal{C}$ ligger i ytan $z = xy$. Notera också att kurvan även ligger på cylindern $x^2 + y^2 = 4$ så $\mathcal{C}$ utgör randen/kanten till ytan $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy, x^2 + y^2 \le 4\}$. Eftersom kurvan $\mathcal{C}$ är orienterad moturs sett ovanifrån ytan $z = xy$ så skall ytan i Stokes sats vara orienterad med en enhetsnormal som pekar upp dvs.

$$\hat{\mathbf{N}} = \frac{-y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$$

Areaelementet på ytan är $dS = \sqrt{1 + y^2 + x^2}\,dxdy$ och

$$\mathbf{curl}\,\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^x - y^3 & e^y + x^3 & e^z \end{vmatrix} = 3(x^2 + y^2)\mathbf{k}$$

så Stokes sats ger att;

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = \iint_S \mathbf{curl}\,\mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{N}}\,dS = \iint_{x^2+y^2\le 4} 3(x^2+y^2)\,dxdy =$$

$$3\int_0^{2\pi}\left(\int_0^2 r^2\,r\,dr\right)d\theta = 6\pi\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^2 = 24\pi$$

Svar: $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = 24\pi$

8. Formulera satsen om kurvintegralers oberoende av integrationsvägen och bevisa att om vektorfältet är konservativt så är kurvintegralen oberoende av integrationsvägen. (6p)

Lösning: Se föreläsningsanteckningar eller Sats 1 i avs.15.4 (sid 866 i sjunde upplagan av Adams). Se den del av beviset som motsvarar $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c)$.

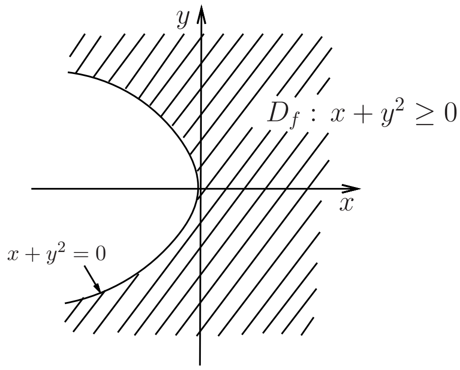
Anonym kod	**TMA043 Flervariabelanalys E2 2013-08-31**	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 1

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm och skissa (den maximala) definitionsmängden till funktionen $f(x,y) = \sqrt{x+y^2}$ (2p)

Svar och skiss:



(b) Bestäm ekvationer för tangentplanet och normallinjen till nivåytan $e^{x+2y+3z} = 1$ genom origo. (3p)

Lösning: Om vi sätter $f(x,y,z) = e^{x+2y+3z}$ så är

$$f_1(0,0,0) = 1, f_2(0,0,0) = 2, f_3(0,0,0) = 3$$

så nivåytans tangentplan genom origo ges av ekvationen;

$$\nabla f(0,0,0) \bullet (x-0, y-0, z-0) = 0 \;\Leftrightarrow\; x + 2y + 3z = 0$$

och normallinjen ges av ekvationerna;

$$\frac{x-0}{f_1(0,0,0)} = \frac{y-0}{f_2(0,0,0)} = \frac{z-0}{f_3(0,0,0)} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$$

Svar: Tangentplanet: $x + 2y + 3z = 0$, Normallinjen: $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$

(c) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 till $f(x,y) = \dfrac{1}{x+2y}$ i punkten $(1,0)$. (3p)

Lösning: Vi har

$$f_1(x,y) = \frac{-1}{(x+2y)^2} \;,\; f_2(x,y) = \frac{-2}{(x+2y)^2}$$

$$f_{11}(x,y) = \frac{2}{(x+2y)^3} \;,\; f_{12}(x,y) = \frac{4}{(x+2y)^3} \;,\; f_{22}(x,y) = \frac{8}{(x+2y)^3}$$

och speciellt är

$$f(1,0) = 1 \;,\; f_1(1,0) = -1 \;,\; f_2(1,0) = -2$$

$$f_{11}(1,0) = 2 \;,\; f_{12}(1,0) = 4 \;,\; f_{22}(1,0) = 8$$

så

Svar: $P_2(x,y) = 1 - (x-1) - 2y + \frac{1}{2}\left(2(x-1)^2 + 8(x-1)y + 8y^2\right)$

Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. (a) Förklara vad som menas med begreppen *kritisk punkt* respektive *lokalt maximum*, för en funktion $f(x,y)$ av två variabler. (2p)

Svar: Se början av avsnitt 13.1 i sjunde upplagan av Adams.

(b) Bestäm de kritiska punkterna till $f(x,y) = 3x - x^3 - 3xy^2$ och avgör om funktionen har ett lokalt maximum i någon av dem. (4p)

Lösning:

$$\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 3x^2 - 3y^2 = 0 \\ -6xy = 0 \end{cases}$$

Av andra ekvationen följer att antingen är $x = 0$ eller så är $y = 0$. Om $x = 0$ så följer av första ekvationen att $y = \pm 1$ så $(0, \pm 1)$ är kritiska punkter till $f(x,y)$. På liknande sätt ser vi att $(\pm 1, 0)$ också är kritiska punkter. Deras karaktär kan vi undersöka med hjälp av Hessianen;

$$\mathcal{H}(x,y) = \begin{bmatrix} -6x & -6y \\ -6y & -6x \end{bmatrix}$$

Speciellt är

$$\mathcal{H}(1,0) = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}, \ \mathcal{H}(-1,0) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{H}(0,1) = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathcal{H}(0,-1) = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriserna $\mathcal{H}(0, \pm 1)$ är indefinita så $(0, \pm 1)$ är sadelpunkter och $\mathcal{H}(-1, 0)$ är positivt definit så $(-1, 0)$ är ett lokalt minimum. Den enda av dessa matriser som är negativt definit, och därmed motsvarar ett max, är $\mathcal{H}(1, 0)$ så;

Svar: $f(x,y)$ har de kritiska punkterna $(\pm 1, 0), (0, \pm 1)$ och den enda av dessa som motsvarar ett lokalt maximum är $(1, 0)$.

Anonym kod	**TMA043 Flervariabelanalys E2 2013-08-31**	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 2

3. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm masscentrum $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ för den del Ω av klotet $x^2+y^2+z^2 \leq 2$ som ligger i första oktanten, då klotet består av ett homogent material. (Tips: $\bar{z} = \iiint_\Omega z\,dV / \iiint_\Omega dV$) (3p)

Lösning: Sfärisk substitution ($x = \rho \sin\phi \cos\theta$, $y = \rho \sin\phi \sin\theta$, $z = \rho\cos\phi$) ger;

$$\iiint_\Omega dV = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 \sin\phi \, d\rho d\phi d\theta = \frac{\pi}{2} \left[-\cos\phi\right]_0^{\pi/2} \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{3}$$

$$\iiint_\Omega z dV = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 \sin\phi\cos\phi \, d\rho d\phi d\theta = \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{2}\sin^2\phi\right]_0^{\pi/2} \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$$

så $\bar{z} = \frac{\pi/4}{\sqrt{2}\pi/3} = \frac{3}{4\sqrt{2}}$, och av symmetriskäl är även $\bar{x} = \bar{y} = \frac{3}{4\sqrt{2}}$.

Svar: $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (\frac{3}{4\sqrt{2}}, \frac{3}{4\sqrt{2}}, \frac{3}{4\sqrt{2}})$

(b) Visa att vektorfältet $\mathbf{F} = (2xy+z)\mathbf{i} + (x^2+2y)\mathbf{j} + (x+1)\mathbf{k}$ är konservativt och bestäm en potential till $\mathbf{F}$ (3p)

Lösning: Vi söker en reellvärd funktion $\phi(x, y, z)$ sådan att $\nabla\phi = \mathbf{F}$.

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 2xy + z \;\Rightarrow\; \phi = x^2y + xz + g(y,z) \text{ , för någon funktion } g(y,z)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = x^2 + 2y = x^2 + \frac{\partial g}{\partial y} \;\Rightarrow\; g = y^2 + h(z) \text{ , för någon funktion } h(z)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = x + 1 = x + h'(z) \;\Rightarrow\; h(z) = z + C \text{ , för någon konstant } C$$

Svar: Eftersom $\mathbf{F}$ har en potential så är det konservativt och en potential är t.ex.

$$\phi(x,y,z) = x^2y + xz + y^2 + z$$

Till följande uppgifter skall fullständiga lösningar redovisas på separata skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

4. (a) Visa att transformationen $\begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases}$ avbildar hela xy-planet *ett-ett* på hela uv-planet genom att ta fram den inversa transformationen. (2p)

Svar: $\begin{cases} x = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v \\ y = \frac{-1}{2}u + \frac{1}{2}v \end{cases}$

(b) Beräkna dubbelintegralen $\iint_D \frac{x-y}{x+y}\,dxdy$, där D är det område som begränsas av linjerna $x - y = 0$, $x - y = 1$, $x + y = 1$ och $x + y = 2$.

(Tips: Gör variabelbytet $\begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases}$) (4p)

Lösning: Eftersom $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$ så är

$$\iint_D \frac{x-y}{x+y}\,dxdy = \int_0^1 \int_1^2 \frac{u}{v} \cdot \frac{1}{2}\,dudv = \frac{1}{2}\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 \left[\ln v\right]_1^2 = \frac{1}{4}\ln 2$$

Svar: $\iint_D \frac{x-y}{x+y}\,dxdy = \frac{1}{4}\ln 2$

5. Låt $\mathcal{S}$ vara den del av paraboloiden $z = 3 - x^2 - y^2$ där $x^2 + y^2 \leq 2$.

(a) Beräkna arean av ytan $\mathcal{S}$. (3p)

Lösning:

$$\text{Arean } = \iint_S dS = \iint_{x^2+y^2\leq 2} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dxdy =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4r^2}\, r\, drd\theta = 2\pi \left[\frac{1}{12}(1 + 4r^2)^{3/2} \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{13\pi}{3}$$

Svar: $13\pi/3$

(b) Beräkna flödet av hastighetsfältet $\mathbf{F} = (x + y)\mathbf{i} + (y - x)\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ ner genom ytan $\mathcal{S}$. (3p)

Lösning: Vi har $\hat{\mathbf{N}}\, dS = -(2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k})\, dxdy$ så

$$\text{Flödet } = \iint_S \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS = \iint_{x^2+y^2\leq 2} (6 - 2x^2 - 2y^2)\, dxdy =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} (6 - 2r^2) r\, drd\theta = 2\pi \left[3r^2 - \frac{1}{2} r^4 \right]_0^{\sqrt{2}} = 8\pi$$

Svar: 8π