Lösningsförslag till tentamen
TMA043 Flervariabelanalys E2

2014-08-30 kl. 8.30–12.30

Examinator: Peter Hegarty, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Åse Fahlander, telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentan krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen tills kursen ges nästa läsår. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar, inklusive eventuella bonuspoäng från kryssuppgifterna.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen, del 1

Uppgift 1 och 2 se nästa blad

Godkäntdelen, del 2

Uppgift 3, 4 och 5 se blad 3

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. Visa att ekvationen $x + y - 2z + e^{3z} = 1$ implicit definierar en funktion $z = f(x, y)$ i en omgivning av punkten $(0, 0, 0)$. Bestäm sedan Taylorpolynomet av grad 2 till funktionen $f(x, y)$ i punkten $(0, 0)$. (6p)

Lösning: Sätt $F(x, y, z) = x+y-2z+e^{3z}-1$. Vi har $F_3(x, y, z) = -2+3e^{3z}$ och speciellt är $F_3(0, 0, 0) = 1 \neq 0$, så det följer av Implicita funktionssatsen att ekvationen $F(x, y, z) = 0$ implicit definierar en funktion $z = f(x, y)$ i en omgivning av punkten $(0, 0, 0)$. Vidare är;

$$x + y - 2f(x, y) + e^{3f(x,y)} = 1 \quad , \quad \text{för alla } (x, y) \text{ i en omgivning av } (0, 0)$$

Deriverar vi båda led m.a.p. x resp. y så får vi

$$1 + (-2 + 3e^{3f(x,y)})f_1(x, y) = 0 \qquad \text{och} \qquad 1 + (-2 + 3e^{3f(x,y)})f_2(x, y) = 0$$

Speciellt får vi att; $f_1(0, 0) = -1$ och $f_2(0, 0) = -1$. Ytterligare derivering ger att;

$$\begin{aligned}
9e^{3f(x,y)}(f_1(x, y))^2 + (-2 + 3e^{3f(x,y)})f_{11}(x, y) = 0\\
9e^{3f(x,y)}f_1(x, y)f_2(x, y) + (-2 + 3e^{3f(x,y)})f_{12}(x, y) = 0\\
9e^{3f(x,y)}(f_2(x, y))^2 + (-2 + 3e^{3f(x,y)})f_{22}(x, y) = 0
\end{aligned}$$

och speciellt får vi att $f_{11}(0, 0) = -9, f_{12}(0, 0) = -9, f_{22}(0, 0) = -9$

Taylorpolynomet av andra ordningen till $f(x, y)$ i punkten $(0, 0)$ är därför

$$p_2(x,y) = f(0,0) + f_1(0,0)x + f_2(0,0)y + \frac{1}{2}\left(f_{11}(0,0)x^2 + 2f_{12}(0,0)xy + f_{22}(0,0)y^2\right) =$$

$$= -x - y - \frac{9}{2}\left(x^2 + 2xy + y^2\right)$$

Svar: $p_2(x, y) = -x - y - \frac{9}{2}x^2 - \frac{18}{2}xy - \frac{9}{2}y^2$

7. (a) För ett vektorfält $\mathbf{F}$, visa att div (curl $\mathbf{F}$) $= 0$ så länge alla partiella derivator existerar. (2p)

Lösning: Om $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ så är

$$\text{curl}\mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

och därmed

$$\text{div}\,(\text{curl}\mathbf{F}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial y} = 0$$

(b) Med hjälp av Stokes sats, beräkna kurvintegralen $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, där $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ och $\mathcal{C}$ är skärningskurvan mellan cylindern $x^2+y^2 = 4$ och planet $x+z = 3$, orienterad moturs sett uppifrån längs z-axeln. (4p)

Lösning: Låt $\mathcal{S}$ vara den del av planet $x+z = 3$ som ligger inuti cylindern $x^2+y^2 = 4$ och låt $\hat{\mathbf{N}}$ vara den uppåtriktade enhetsnormalen på ellipsskivan $\mathcal{S}$. Då är;

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} \text{curl}\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS$$

Här är;

$$\text{curl}\mathbf{F} = (2x+1)\mathbf{k} \text{ och } \quad \hat{\mathbf{N}}\, dS = (\mathbf{i} + \mathbf{k})\, dxdy$$

och $\mathcal{S}$ projiceras ner på cirkelskivan $D : x^2 + y^2 \leq 4$ i xy-planet. Varpå vi får att;

$$\iint_{\mathcal{S}} \text{curl}\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \iint_D (2x+1)\, dxdy = \iint_D dxdy = \text{arean av } D = 4\pi$$

8. (a) För en funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ och en punkt (a, b), förklara vad som menas med

(i) att f är *differentierbar* i (a, b), (1p)

(ii) gradienten $\nabla f(a, b)$, (1p)

(iii) nivåkurvan till f genom punkten (a, b). (1p)

(b) Bevisa att om f är differentierbar i (a, b) och $\nabla f(a, b) \neq \mathbf{0}$, då är $\nabla f(a, b)$ normal till nivåkurvan till f genom (a, b). (3p)

Lösning: Se Kapitel 12 i boken. Del (b) är Sats 12.6.

Anonym kod	TMA043 Flervariabelanalys E2 2014-08-30	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 1

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm $\dfrac{\partial}{\partial u} f(x,y)$, då $f(x,y) = e^{xy}$, $x = 3u\sin v$ och $y = 4uv^2$. (2p)

Lösning: Kedjeregeln ger att;

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = (ye^{xy})(3\sin v) + (xe^{xy})(4v^2) = \cdots = 24uv^2 \sin v\, e^{12u^2v^2\sin v}.$$

Svar: $\dfrac{\partial}{\partial u} f(x,y) = 24uv^2 \sin v\, e^{12u^2v^2\sin v}$

(b) Låt $f(x,y) = 2x + e^{x^2-y}$. Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan $z = f(x,y)$ i punkten $(0,0,1)$. Bestäm även ett approximativt värde för $f(0.02, 0.03)$. (3p)

Lösning: Tangentplanet till en funktionsyta $z = f(x,y)$ i en punkt (x_0, y_0, z_0) beskrivs av ekvationen;

$$z = z_0 + f_1(x_0,y_0)(x - x_0) + f_2(x_0,y_0)(y - y_0). \tag{1}$$

Här gäller att

$$f_1(x,y) = 2 + 2xe^{x^2-y}, \quad f_2(x,y) = -e^{x^2-y},$$

så $f_1(0,0) = 2$ och $f_2(0,0) = -1$. Insättning i (1) ger ekvationen $z = 1 + 2x - y$.
Med $x = 0.02$, $y = 0.03$ i tangentplanets ekvation får vi $z = 1.01$, som då ger ett approximativt värde för f(0.02,0.03).

Svar: $z = 1 + 2x - y$ och $f(0.02, 0.03) \approx 1.01$

(c) Bestäm längden av kurvan med parametriseringen $\mathbf{r}(t) = 2t\,\mathbf{i} + \ln t\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k}$, $1 \le t \le e$. (3p)

Lösning: Längden ges av

$$\int_1^e |\mathbf{r}'(t)|\,dt = \int_1^e \sqrt{2^2 + (1/t)^2 + (2t)^2}\,dt = \int_1^3 \sqrt{4 + \frac{1}{t^2} + 4t^2}\,dt =$$
$$= \int_1^e \sqrt{\frac{4t^4 + 4t^2 + 1}{t^2}}\,dt = \int_1^e \sqrt{\frac{(2t^2+1)^2}{t^2}}\,dt = \int_1^e \frac{2t^2+1}{t}\,dt =$$
$$= \int_1^e \left(2t + \frac{1}{t}\right)dt = (t^2 + \ln t)_1^e = (e^2 + 1) - (1^2 + 0) = e^2.$$

Svar: Kurvan har längden e^2 (l.e.)

Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Bestäm alla kritiska punkter hos funktionen $f(x,y) = x^3 - 2y^2 - 2y^4 + 3x^2y$, och avgör om funktionen har ett lokalt max, lokalt min eller ingetdera, i de kritiska punkterna. (6p)

Lösning: I de kritiska punkterna är

$$f_1 = 3x^2 + 6xy = 0, \tag{2}$$
$$f_2 = -4y - 8y^3 + 3x^2 = 0. \tag{3}$$

Från (2) har vi $3x(x + 2y) = 0$ så antingen $x = 0$ eller $x = -2y$. Tag först $x = 0$. Insättning i (3) ger $-4y - 8y^3 = 0 \Rightarrow -4y(1 + 2y^2) = 0 \Rightarrow y = 0$, ty $1 + 2y^2$ är alltid positiv. Då har vi en kritisk punkt $(0, 0)$. Tag nu i stället $x = -2y$. Insättning i (3) ger $-4y - 8y^3 + 12y^2 = 0 \Rightarrow -4y(2y^2 - 3y + 1) = 0$. Om $y = 0$ så får vi $(0, 0)$ igen. Annars är $2y^2 - 3y + 1 = 0 \Rightarrow (2y - 1)(y - 1) = 0 \Rightarrow y = 1/2$ eller $y = 1$, som i sin tur ger $x = -2$ eller $x = -1$. Så vi får ytterligare två kritiska punkter, $(-1, 1/2)$ och $(-2, 1)$.

För att klassificera de kritiska punkterna tillämpar vi andra derivatans test. Först har vi

$$f_{11} = 6(x + y), \quad f_{22} = -4 - 24y^2, \quad f_{12} = 6x.$$

I punkten $(-1, 1/2)$ har vi $f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = (-3)(-10) - (-6)^2 = -6 < 0$, som medför att det är en sadelpunkt.
I punkten $(-2, 1)$ har vi $f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = (-6)(-28) - (-12)^2 = 24 > 0$, så en lokal extrempunkt. Eftersom $f_{11} = -6 < 0$ är det en lokal maximum.
I punkten $(0, 0)$ är $f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = 0$, så testet ger inget definitivt svar. Däremot kan vi direkt konstatera att för godtyckligt små $\epsilon > 0$ gäller $f(\epsilon, 0) = \epsilon^3 > 0$ medan att $f(0, \epsilon) = -2\epsilon^2 - 2\epsilon^4 < 0$, så f antar både positiva och negativa värden i närheten av $(0, 0)$ och därmed är $(0, 0)$ en sadelpunkt.

Anonym kod	**TMA043 Flervariabelanalys E2 2014-08-30**	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 2

3. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm $\iint_T (4e^{x^2} - 5\sin y)\, dA$, där T är det område i $\mathbb{R}^2$ som begränsas av linjerna $y = x$, $y = 0$ och $x = 4$. (3p)

Lösning: Den itererade integralen blir

$$\int_0^4 \left(\int_0^x (4e^{x^2} - 5\sin y)\, dy \right) dx = \int_0^4 \left[4ye^{x^2} + 5\cos y \right]_0^x dx = \int_0^4 (4xe^{x^2} + 5\cos x - 5)\, dx =$$

$$= \left[2e^{x^2} + 5\sin x - 5x \right]_0^4 = (2e^{16} + 5\sin 4 - 20) - (2 + 0 + 0) = 2e^{16} + 5\sin 4 - 22.$$

Svar: $\iint_T (4e^{x^2} - 5\sin y)\, dA = 2e^{16} + 5\sin 4 - 22$

(b) Betrakta vektorfältet $\mathbf{F} = (2xy - 3)\mathbf{i} + (x^2 + \cos y)\mathbf{j}$. Visa att $\mathbf{F}$ är konservativt, bestäm en potential för $\mathbf{F}$ och beräkna det arbete som kraftfältet $\mathbf{F}$ uträttar på en partikel som förflyttar sig rätlinjigt från $(0, 0)$ till $(2, 1)$. (3p)

Lösning: $\partial F_1/\partial y = 2x = \partial F_2/\partial x$, så $\mathbf{F}$ är konservativt. En potential ϕ ska uppfylla

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2xy - 3, \qquad \frac{\partial \phi}{\partial y} = x^2 + \cos y,$$

och man kontrollerar ganska lätt att lösningen är $\phi(x, y) = x^2y + \sin y - 3x + C$.
Arbetet ges sedan av $\phi(2, 1) - \phi(0, 0) = -4 + \sin 1$.

Svar: Potentialerna har formen $\phi(x, y) = x^2y + \sin y - 3x + C$, och arbetet är $-2 + \sin 1$.

Till följande uppgifter skall fullständiga lösningar redovisas på separata skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

4. Låt K beteckna området i $\mathbb{R}^3$ som inneslutas av paraboloiden $z = 1 + x^2 + y^2$ och planet $z = 5$, och låt ∂K beteckna dess yta, inklusive toppen.

(a) Beräkna volymen av K. (2p)

(b) Beräkna arean av ∂K. (2p)

(c) Med hjälp av Gauss divergens sats, bestäm flödet ut ur K av vektorfältet (4p)

$$\mathbf{F} = \left(\frac{1}{3}x^3 + \cos(yz) \right) \mathbf{i} + (xy + z^2)\mathbf{j} + (y^2z + e^{xy})\mathbf{k}.$$

(Tips för (c): Använd symmetri för att få bort en term ur integralen).

Lösning (a): Då $z = 5$ så är $x^2 + y^2 = 4$. Således ges volymen av

$$\iiint dV = \iint_{0 \le x^2+y^2 \le 4} dx\, dy \int_{1+x^2+y^2}^5 dz = \iint_{0 \le x^2+y^2 \le 4} (4 - x^2 - y^2)\, dx\, dy.$$

Vi byter till polära koordinater och får

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2)\, (r\, dr\, d\theta) = 8\pi.$$

(b): Ytan består av en del av paraboloiden plus toppen. Den senare är en skiva av radie 2 (parallell med skivan $x^2 + y^2 \leq 4$ i xy-planet) och därmed har arean $\pi(2^2) = 4\pi$. Den första är en del av en funktionsyta $z = f(x, y)$ så vi kan använda formeln

$$\text{Area} = \iint \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\, dx\, dy.$$

I det här fallet är $f(x, y) = 1 + x^2 + y^2$ och vi integrerar över projektionen på xy-planet, som är just skivan $x^2 + y^2 \leq 4$. Därmed har vi integralen

$$\iint_{0 \leq x^2+y^2 \leq 4} \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + 1}\, dx\, dy = \iint_{0 \leq x^2+y^2 \leq 4} \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}\, dx\, dy.$$

Vi byter till polära koordinater och får

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r\sqrt{4r^2 + 1}\, dr.$$

r-integralen beräknas genom att substituera $u = 4r^2 + 1$ och integralen blir till slut $\frac{\pi}{6}\left(17^{3/2} - 1\right)$. Tillsammans med toppen är alltså den totala arean $\frac{\pi}{6}\left(17^{3/2} + 23\right)$.

(c):

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = x^2 + x + y^2.$$

Flödet enligt Gauss sats är lika med $\iiint (x^2 + x + y^2)\, dV$, där vi integrerar över samma område som i del **(a)**. Notera att integralen av x blir noll av symmetriskäl. Då kommer vi att få

$$\iint_{0 \leq x^2+y^2 \leq 4} (x^2 + y^2)(4 - x^2 - y^2)\, dx\, dy$$

som efter byte till polära koordinater blir

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^2(4 - r^2) r\, dr = \cdots = \frac{32\pi}{3}.$$

5. Låt $\mathcal{R}$ vara det område i första kvadranten av $\mathbb{R}^2$ som begränsas av koordinataxlarna samt cirklarna med radier 1 och 3 kring origo. Med hjälp av Greens sats, bestäm

$$\oint_{\partial \mathcal{R}} (e^x + 6xy)\, dx + (8x^2 + \sin y^2)\, dy,$$

där kurvintegralen tas moturs längs randen till $\mathcal{R}$. (4p)

Lösning: Kom ihåg att Greens sats säger att

$$\oint_{\partial \mathcal{R}} F_1\, dx + F_2\, dy = \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA,$$

där kurvintegralen tas moturs längs randen. Här är $F_1 = e^x + 6xy$ och $F_2 = 8x^2 + \sin y^2$, så Greens sats säger att kurvintegralen är lika med

$$\iint_{\mathcal{R}} (16x - 6x)\, dA = 10 \iint_{\mathcal{R}} x\, dA.$$

Området $\mathcal{R}$ är en fjärdedel av en annulus så det är naturligt att byta till polära koodinater. Ty $x = r\cos\theta$ i polära koordinater får vi

$$10 \int_0^{\pi/2} \int_1^3 (r\cos\theta)\,(r\, dr\, d\theta) = 10 \times (\sin\theta)_0^{\pi/2} \times (r^3/3)_1^3 = \cdots = \frac{260}{3}.$$