Tentamen
TMA043 Flervariabelanalys E2

2013-10-24 kl. 8.30–12.30

Examinator: Peadar O' hÉigeartaigh, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Anna Persson, telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentan krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen tills kursen ges nästa läsår. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar, inklusive eventuella bonuspoäng från kryssuppgifterna.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen, del 1

Uppgift 1 och 2 se nästa blad

Godkäntdelen, del 2

Uppgift 3, 4 och 5 se blad 3

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. Visa att ekvationen $e^{xyz} = z - x - y$ implicit definierar en funktion $z = f(x, y)$ i en omgivning av punkten $(0, 1, 2)$ och beräkna $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 1)$ (4p)

Lösning: Funktionen ges implicit av $G(x, y, z) = 0$ där $G(x, y, z) = e^{xyz} + x + y - z$. Implicit derivering m.a.p. x ger

$$G_x + G_z \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{G_x}{G_z}. \tag{1}$$

På samma vis, leder implicit derivering m.a.p. y till

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{G_y}{G_z}. \tag{2}$$

Formlerna (1) och (2) maker sense om och endast om $G_z \neq 0$, och detta är kravet som måste uppfyllas för att z ska vara en funktion av x och y. Vi beräknar direkt

$$G_x = yze^{xyz} + 1, \tag{3}$$
$$G_y = xze^{xyz} + 1, \tag{4}$$
$$G_z = xye^{xyz} - 1. \tag{5}$$

I punkten $(0, 1, 2)$ gäller alltså

$$G_x = 3, \quad G_y = 1, \quad G_z = -1. \tag{6}$$

Eftersom $G_z(0,1,2) \neq 0$ så är z en funktion av x och y i en omgivning av $(0,1,2)$. Dessutom har vi enligt (1), (2) och (6) att

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,1,2) = 3, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(0,1,2) = 1. \tag{7}$$

Nu till den blandade andra derivatan. Från (1), (6) och kvotregeln härleder vi att

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{G_x}{G_z}\right) = \frac{G_x \frac{\partial G_z}{\partial y} - G_z \frac{\partial G_x}{\partial y}}{(G_z)^2} \overset{\text{vid}(0,1,2)}{=} 3\frac{\partial G_z}{\partial y} + \frac{\partial G_x}{\partial y}. \tag{8}$$

Implicit derivering ger också formlerna

$$\frac{\partial G_z}{\partial y} = G_{zy} + G_{zz}\frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial G_x}{\partial y} = G_{xy} + G_{xz}\frac{\partial z}{\partial y}.$$

I punkten $(0,1,2)$ gäller därmed enligt (7) att

$$\frac{\partial G_z}{\partial y} = G_{zy} + G_{zz}, \quad \frac{\partial G_x}{\partial y} = G_{xy} + G_{xz}. \tag{9}$$

Insättning av (9) in i (8) ger sedan

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0,1,2) = 3(G_{zy} + G_{zz}) + 1(G_{xy} + G_{xz}). \tag{10}$$

Från (3), (4) och (5) härleder vi att

$$G_{zy} = x(1+xyz)e^{xyz}, \quad G_{zz} = (xy)^2 e^{xyz}, \quad G_{xy} = z(1+xyz)e^{xyz}, \quad G_{xz} = y(1+xyz)e^{xyz},$$

sådan att i punkten $(0,1,2)$ gäller

$$G_{zy} = 0, \quad G_{zz} = 0, \quad G_{xy} = 2, \quad G_{xz} = 1.$$

Insättning av dessa värden i (10) ger slutligen att $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0,1,2) = 3$.

7. Betrakta vektorfältet $\mathbf{F} = xz\mathbf{i} - yz\mathbf{j} + (x^2+y^2)\mathbf{k}$ (obs! samma som i uppgift 5)

(a) Visa att $\mathbf{G} = (\frac{1}{3}x^3 + xy^2)\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$ är en vektorpotential till $\mathbf{F}$ dvs visa att $\mathbf{curl}\,\mathbf{G} = \mathbf{F}$. Utnyttja sedan detta samband och Stokes sats för att beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}$ upp genom halvsfären $x^2+y^2+z^2 = 4, z \geq 0$. (4p)

(b) Bestäm ekvationer för fältlinjerna till vektorfältet $\mathbf{F}$ (4p)

Lösning (a): Vi har

$$\nabla \times \mathbf{G} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{1}{3}x^3 + xy^2 & xyz \end{vmatrix} = (xz - 0, 0 - yz, (x^2+y^2) - 0) = (xz, -yz, x^2+y^2) = \mathbf{F}, \text{ v.s.v.}$$

Om $\mathcal{S}$ betecknar halvsfären som i Uppgift 5, så ges dess rand $\mathcal{C}$ av cirkeln $x^2+y^2 = 4,\ z = 0$, dvs randen till locket $\mathcal{L}$ från Uppgift 4. Stokes sats säger att

$$\iint_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{G}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}, \tag{11}$$

då $\mathcal{C}$ orienteras moturs sett ovanifrån. VL i (11) är just den flödesintegral vi söker, ty $\nabla \times \mathbf{G} = \mathbf{F}$. Så vi kan i stället beräkna HL. Vi visar två alternativa sätt att göra detta.

Metod 1: Parametrisera cirkeln

Cirkeln $\mathcal{C}$ parametriseras av

$$\mathbf{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t, 0), \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

På $\mathcal{C}$ har vi

$$\mathbf{G} = \left(0, \frac{1}{3}x^3 + xy^2, xyz\right) = \left(0, \frac{8}{3}\cos^3 t + 8\cos t \sin^2 t, 0\right),$$

så

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \left(0, \frac{8}{3}\cos^3 t + 8\cos t \sin^2 t, 0\right) \cdot (-2\sin t, 2\cos t, 0)\, dt =$$

$$= 16\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{3}\cos^4 t + \cos^2 t \sin^2 t\right) dt = 16\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{3}\cos^4 t + \cos^2 t(1-\cos^2 t)\right) dt =$$

$$= 16\int_0^{2\pi} \left(\cos^2 t - \frac{2}{3}\cos^4 t\right) dt. \tag{12}$$

Vi använder den trigonometriska identiteten

$$\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t). \tag{13}$$

Om vi kvadrerar båda leden och använder samma identitet igen så får vi

$$\cos^4 t = \frac{1}{4}(1+\cos 2t)^2 = \frac{1}{4}(1 + 2\cos 2t + \cos^2 2t) =$$

$$= \frac{1}{4}\left[1 + 2\cos 2t + \frac{1}{2}(1+\cos 4t)\right] = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{8}\cos 4t. \tag{14}$$

Insättning av (13) och (14) in i (12) ger

$$16\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\cos 2t - \frac{1}{12}\cos 4t\right) dt.$$

Integralerna av cosinus funktionerna kommer att bli noll, av symmetriskäl. Så vi lämnas med $16\int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\, dt = 16\left(\frac{\pi}{2}\right) = 8\pi$, som ju stämmer överens med resultatet i Uppgift 4.

Metod 2: Använd Greens sats i planet

Kurvan $\mathcal{C}$ ligger i xy-planet så vi kan strunta i z-kompenenten av $\mathbf{G}$ och betrakta den som ett vektorfält i planet, nämligen $\mathbf{G} = 0 \cdot \mathbf{i} + \left(\frac{1}{3}x^3 + xy^2\right)\mathbf{j}$. Greens sats innebär sedan att

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{L}} \left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y}\right) dx\, dy = \iint_{\mathcal{L}} (x^2+y^2)\, dx\, dy,$$

där $\mathcal{L}$ är samma område som i Uppgift 4, nämligen skivan $x^2+y^2 \le 4$. Så vi byter till polära koordinater och får

$$\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2\,(r\, dr\, d\theta) = 8\pi, \text{ v.s.v.}$$

Lösning (b): Ekvationerna för fältlinjerna lyder i allmänhet (se s.844 i boken)

$$\frac{dx}{F_1} = \frac{dy}{F_2} = \frac{dz}{F_3},$$

som i detta fall blir

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{-yz} = \frac{dz}{x^2+y^2}. \tag{15}$$

Tag först den vänstra ekvationen. Man kan förkorta bort z så att det står $\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{-y}$. Integration ger

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{-y} + C \Rightarrow \ln x = -\ln y + C \Rightarrow \ln x + \ln y = C \Rightarrow \ln(xy) = C \Rightarrow xy = e^C.$$

Kalla e^C för C_1 och notera att C_1 måste alltså vara positiv. Så vi har

$$xy = C_1, \quad C_1 > 0. \tag{16}$$

Detta är ekvationen för en hyperbel med sitt fokus i $(0,0)$ och sina två delar i första och tredje kvadranten. Återvänd nu till (15) och betrakta

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dz}{x^2+y^2} \Rightarrow \left(\frac{x^2+y^2}{x}\right) dx = z\,dz.$$

Insättning av (16) ger

$$\left(x + \frac{C_1^2}{x^3}\right) dx = z\,dz.$$

Vi integrerar båda leden och får

$$\frac{x^2}{2} - \frac{C_1^2}{2x^2} = \frac{z^2}{2} + C_2,$$

för någon annan integrationskonstant C_2. Detta kan förenklas till

$$x^2 - \left(\frac{C_1}{x}\right)^2 = z^2 + 2C_2 \overset{(16)}{\Rightarrow} x^2 - y^2 - z^2 = 2C_2, \tag{17}$$

Om $C_2 > 0$ beskriver (17) en tvåmantlad hyperboloid (se s.595 i boken). Om $C_2 < 0$ beskriver den en enmantlad hyperboloid. Om $C_2 = 0$ beskriver den en dubbelkon.

Slutligen ges fältlinjerna av skärningskurvorna mellan (16) och (17).

8. Definiera begreppen gradient och riktningsderivata för en funktion av två variabler. Bevisa sedan dels att $D_{\mathbf{u}}f(a,b) = \mathbf{u}\bullet\nabla f(a,b)$ och dels att i punkten (a,b) växer $f(x,y)$ snabbast i riktningen $\nabla f(a,b)$. (6p)

Lösning: Se Definitioner 6 och 7, samt Theorem 7 och efterföljande Remark i avsnitt 12.7 i boken.

Lycka till!
Peadar O' hÉigeartaigh

Formelblad för TMA043 och MVE085, 13/14

Trigonometri.

$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$

$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$

$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$

$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$

Integralkatalog

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad , \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ , \ 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \ , \ a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \ , \ a > 0$$

$$\int \sqrt{a-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \ , \ a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln|x+\sqrt{x^2+a}| + C \ , \ a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad , \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad , \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \frac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dxdydz}$, analogt för y_T, z_T.

$\rho(x,y,z)$ är densiteten.

Anonym kod	**TMA043 Flervariabelanalys E2 2013-10-24**	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 1

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm riktningsderivatan av funktionen $f(x,y) = y^2 + 2xy - x^3$ i punkten $(2,1)$ och i riktningen $\mathbf{u} = \frac{1}{5}(3,4)$. (2p)

Lösning: $f_x = 2y - 3x^2$ och $f_y = 2y + 2x$ så i punkten $(2,1)$ har vi $\nabla f = (f_x, f_y) = (-10, 6)$. Eftersom $\mathbf{u}$ är redan en enhetsvektor så ges riktningsderivatan av $\nabla f \cdot \mathbf{u} = (-10,6) \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = -\frac{6}{5}$.

(b) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 till funktionen $f(x,y) = \ln(x+2y)$ i punkten $(1,0)$ och använd Taylorpolynomet för att bestämma en approximation av funktionsvärdet $f(1.1, 0.2)$ (3p)

Lösning: Man beräknar

$$f_x = \frac{1}{x+2y}, \quad f_y = \frac{2}{x+2y}, \quad f_{xx} = \frac{-1}{(x+2y)^2}, \quad f_{xy} = \frac{-2}{(x+2y)^2}, \quad f_{yy} = \frac{-4}{(x+2y)^2}.$$

I punkten $(1,0)$ gäller alltså

$$f_x = 1, \quad f_y = 2, \quad f_{xx} = -1, \quad f_{xy} = -2, \quad f_{yy} = -4.$$

Den allmänna formeln för Taylorapproximationen av grad 2 lyder

$$f(a+h, b+k) \approx f(a,b) + hf_x + kf_y + \frac{1}{2}\left(h^2 f_{xx} + 2hk f_{xy} + k^2 f_{yy}\right),$$

där alla partiella derivator beräknas i baspunkten (a,b). Här är $f(x,y) = \ln(x+2y)$ och vi sätter in $a = 1, b = 0, h = 0.1, k = 0.2$ och de partiella derivatorna ovan. Vi får

$$f(1.1, 0.2) \approx \ln 1 + (0.1)(1) + (0.2)(2) + \frac{1}{2}\left[(0.1)^2(-1) + 2(0.1)(0.2)(-2) + (0.2)^2(-4)\right] \overset{\ln 1 = 0}{=} 0.375.$$

(c) En partikel rör sig längs kurvan $\mathbf{r} = \frac{2}{3}(t-2)^{3/2}\mathbf{i} + t\mathbf{j} + (t+1)\mathbf{k}$. Bestäm de tidpunkter $t = a$ och $t = b$ för vilka partikeln befinner sig i punkterna $(0,2,3)$ respektive $(\frac{2}{3}, 3, 4)$. Beräkna sedan längden av kurvan mellan punkterna. (3p)

Lösning: Man ser direkt att $a = 2$, $b = 3$. Längden av kurvan ges sedan av

$$\int_2^3 \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| dt.$$

Vi har

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \sqrt{t-2}\,\mathbf{i} + 1 \cdot \mathbf{j} + 1 \cdot \mathbf{k}$$

så $|d\mathbf{r}/dt| = \sqrt{(\sqrt{t-2})^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{t}$. Således har kurvan längden

$$\int_2^3 \sqrt{t}\, dt = \frac{2}{3}\left(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}\right).$$

Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Bestäm det största värde som funktionen $f(x, y, z) = x+y-z$ antar på sfären $x^2+ y^2+ z^2 = 1$. (6p)

Lösning: Vi vill maximera $f(x, y, z) = x + y - z$ under bivillkoret $g(x, y, z) = 0$ där $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Lagranges metod ger de fyra ekvationerna

$$f_x = \lambda g_x, \quad f_y = \lambda g_y, \quad f_z = \lambda g_z, \quad g = 0,$$

som i detta fall blir

$$1 = \lambda(2x), \quad 1 = \lambda(2y), \quad -1 = \lambda(2z), \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Man härleder direkt från de tre första ekvationerna att $x = y = -z$. Insättning i den fjärde ger sedan $3x^2 = 1$ så vi har två lösningar: $(x, y, z) = \pm(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$. Eftersom vi vill *maximera* och inte minimera f så är det klart att vi ska välja den lösning med ett positivt x-värde. Så $f_{\text{max}} = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

Anonym kod	TMA043 Flervariabelanalys E2 2013-10-24	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 2

3. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Visa att vektorfältet $\mathbf{F} = yz\,\mathbf{i} + (xz+z)\mathbf{j} + (xy+y+1)\mathbf{k}$ är virvelfritt (irrotational) och bestäm en potential till $\mathbf{F}$. (3p)

Lösning:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & xz+z & xy+y+1 \end{vmatrix} = ((x+1)-(x+1), y-y, z-z) = (0,0,0),$$

så $\mathbf{F}$ är virvelfritt. En potential ϕ måste uppfylla de tre ekvationerna

$$\phi = \int yz\,dx + C_1(y,z) = xyz + C_1(y,z),$$

$$\phi = \int (xz+z)\,dy + C_2(x,z) = xyz + yz + C_2(x,z),$$

$$\phi = \int (xy+y+1)\,dz + C_3(x,y) = xyz + yz + z + C_3(x,y).$$

För konsekvens krävs $\phi = xyz + yz + z + C$.

(b) Bestäm masscentrum $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ för den kropp K som består av ett homogent material och som begränsas av xy-planet och paraboloiden $z = 1 - x^2 - y^2$. (3p)
(Tips: $\bar{z} = \iiint_K z\,dV / \iiint_K dV$ och av symmetriskäl är $\bar{x} = \bar{y} = 0$)

Lösning: Det är enklast att använda cylindriska koordinater. Täljaren blir

$$\iint_{x^2+y^2\le 1} dx\,dy \int_0^{1-x^2-y^2} z\,dz = \frac{1}{2} \iint_{x^2+y^2\le 1} (1-x^2-y^2)^2\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-r^2)^2\, r\,dr\,d\theta = \cdots = \frac{\pi}{6}.$$

Nämnaren beräknas på liknande vis:

$$\iint_{x^2+y^2\le 1} dx\,dy \int_0^{1-x^2-y^2} 1\,dz = \iint_{x^2+y^2\le 1} (1-x^2-y^2)\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-r^2)\, r\,dr\,d\theta = \cdots = \frac{\pi}{2}.$$

Så $\bar{z} = \frac{\pi/6}{\pi/2} = \frac{1}{3}$ och masscentrumet är punkten $\left(0, 0, \frac{1}{3}\right)$.

Till följande uppgifter skall fullständiga lösningar redovisas på separata skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

4. Betrakta vektorfältet $\mathbf{F} = (8x^2 - y^2)\mathbf{i} + (2x^2 + y)\mathbf{j}$ och låt $\mathcal{C}$ vara randkurvan till triangeln med hörn i $(0,0), (2,0)$, och $(0,4)$ orienterad moturs. Beräkna kurvintegralen $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ genom att...

(a) parametrisera randbitarna och utgå från definitionen av kurvintegral. (3p)

(b) använda Greens sats. (3p)

Lösning (a): Vi delar upp randen som $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$ där $\mathcal{C}_1$ är sträckan från $(0,0)$ till $(2,0)$, $\mathcal{C}_2$ är sträckan från $(2,0)$ till $(0,4)$ och $\mathcal{C}_3$ är sträckan från $(0,4)$ tillbaka till $(0,0)$. Då gäller

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{C}_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \tag{18}$$

Vi har parametriseringarna

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &: \mathbf{r}(t) = (t, 0),\ 0 \le t \le 2;\ d\mathbf{r}/dt = (1, 0). \\ \mathcal{C}_2 &: \mathbf{r}(t) = (2-t, 2t),\ 0 \le t \le 2;\ d\mathbf{r}/dt = (-1, 2). \\ \mathcal{C}_3 &: \mathbf{r}(t) = (0, 4-t),\ 0 \le t \le 4;\ d\mathbf{r}/dt = (0, -1). \end{aligned}$$

Vi har också $\mathbf{F} = (8x^2 - y^2, 2x^2 + y)$ så på varsin del av randen ges $\mathbf{F}$ i termer av parametern t av respektive

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &: \mathbf{F} = (8t^2, 2t^2), \\ \mathcal{C}_2 &: \mathbf{F} = (8(2-t)^2 - (2t)^2, 2(2-t)^2 + 2t) = \cdots = (32 - 32t + 4t^2, 8 - 6t + 2t^2), \\ \mathcal{C}_3 &: \mathbf{F} = (-(4-t)^2, 4-t). \end{aligned}$$

Vi beräknar de tre integralerna i (18) i tur och ordning. För det första,

$$\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^2 (8t^2, 2t^2) \cdot (1, 0)\, dt = \int_0^2 8t^2\, dt = \cdots = \frac{64}{3}.$$

För det andra,

$$\int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^2 (32 - 32t + 4t^2, 8 - 6t + 2t^2) \cdot (-1, 2)\, dt = \int_0^2 (-16 + 20t)\, dt = \cdots = 8.$$

För det tredje,

$$\int_{\mathcal{C}_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^4 (-(4-t)^2, 4-t) \cdot (0, -1)\, dt = \int_0^4 (t-4)\, dt = \cdots = -8.$$

Sammanlagt har vi därmed

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{64}{3} + 8 - 8 = \frac{64}{3}.$$

(b): Enligt Greens sats gäller (T står för insidan till triangeln)

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_T \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx\, dy = \iint_T (4x + 2y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^2 dx \int_0^{4-2x} (4x + 2y)\, dy = \int_0^2 dx \left[(4xy + y^2)|_0^{4-2x} \right] = \cdots = 4 \int_0^2 (4 - x^2)\, dx = \cdots = \frac{64}{3}, \text{ v.s.v.}$$

5. Betrakta vektorfältet $\mathbf{F} = xz\mathbf{i} - yz\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k}$

(a) Visa att $\mathbf{F}$ är källfritt (solenoidal). (2p)

(b) Bestäm flödet av vektorfältet $\mathbf{F}$ upp genom halvsfären $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \ge 0$. (4p)

Lösning (a):

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(xz) + \frac{\partial}{\partial y}(-yz) + \frac{\partial}{\partial z}(x^2 + y^2) = z - z + 0 = 0, \text{ v.s.v.}$$

(b): Kalla halvsfären för $\mathcal{S}$. Om vi lägger på ett lock $\mathcal{L}$, nämligen skivan $z = 0$, $x^2 + y^2 \le 4$, så får vi en sluten yta $\mathcal{S} \cup \mathcal{L}$ och enligt Gauss sats gäller

$$\oiint_{\mathcal{S} \cup \mathcal{L}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV.$$

Men trippelintegraln är noll, ty vi har redan sett i del **(a)** att $\mathbf{F}$ är källfritt. Det betyder att flödet upp, dvs ut, genom $\mathcal{S}$ måste balanseras exakt av flödet ut, dvs ner, genom $\mathcal{L}$, dvs

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS = -\iint_{\mathcal{L}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS.$$

Men flödet genom $\mathcal{L}$ kan beräknas direkt ty normalvektorn är konstant där, nämligen $\hat{\mathbf{N}} = (0, 0, -1)$. Så

$$\iint_{\mathcal{L}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS = \iint_{x^2+y^2 \leq 4} -(x^2 + y^2) \, dS = -\int_0^{2\pi} \int_0^2 r^2 \, (r \, dr \, d\theta) = -8\pi.$$

Så flödet upp, dvs ut, genom halvsfären är $+8\pi$.