TMA043 Flervariabelanalys E2, läsåret 2013/14
Vecko–PM läsvecka 2

Calculus: 12.4 - 12.7, 12.9

Kapitel 12 handlar om funktioner av flera variabler. I veckans avsnitt skall vi arbeta med en del begrepp som är välkända från envariableanalysen men nu i en mer generell tappning. I huvudsak handlar det om att derivera funktioner av flera variabler och använda derivata för att på olika sätt beskriva och approximera sådana funktioner. Derivatan av en reellvärd funktion $f(x)$ av en variabel i en punkt x_0 mäter hur "snabbt/långsamt" funktionsvärdena förändras i en omgivning av x_0 och man vill att derivatan skall ha samma betydelse även för funktioner $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ av flera variabler. Det är dock inte givet hur man skall mäta denna förändring eftersom vi i omgivning av en punkt i $\mathbb{R}^n$ har oändligt många riktingar att ta hänsyn till. De *partiella derivatorna* mäter förändringshastigheten i axelparallella riktingar och med dessa, samlade i en vektor som kallas *gradienten*, kan vi sedan enkelt bestämma förändringshastigheten i alla andra riktingar genom s.k. *riktningsderivata.* I många situationer behöver man kunna hantera sammansättningar av funktioner, t.ex. vid variabelbyten, och för att derivera sådana sammansättningar finns en *kedjeregel*, liknande den för funktioner av en variabel. Första ordningens derivator innehåller värdefull information om en funktions beteende och med dess hjälp kommer vi bl.a. beräkna approximativa funktionsvärden, genom *linjäriseringen* eller *differentialen*, och bestämma *tangentplan* till funktionsytor och nivåytor. Vi kommer införa begreppet *differentierbar* vilket är den naturliga motsvarigheten till deriverbarhet för funktioner av en variabel.Vi skall även studera högre ordningens derivator och bl.a. se hur dom i *Taylorutveckling* tillsammans kan kombineras för att ge en bättre approximation av en funktion än vad linjärisering ger. Mycket av den naturvetenskapliga och tekniska forskningen under det förra århundratet präglades av linjära approximationer av mer komplexa problem. Mycket talar för att man i framtiden kommer behöva mer nogranna analyser som bygger på högre ordningens approximationer.

Calculus: 13.1

Kapitel 13 handlar om tillämpningar av derivata. Framför allt kommer vi se på hur derivata kan användas för att lösa olika typer av optimeringsproblem, som beskrivs med funktioner av flera variabler. I avsnitt 13.1 ges tillräckliga villkor för existensen av extremvärden (max/min) och där beskrivs också var man skall leta för att finna dessa extremvärden. Lokala extremvärden kan t.ex. finnas i s.k. *stationära punkter*, där de partiella derivatorna är 0. Ofta kan man avgöra om en sådan stationär punkt är lokalt maximum eller minimum genom att studera funktionens andraderivator. I avsnittet finns enkla kriterier för att avgöra detta.

Rekommenderade uppgifter

Avsnitt	Godkäntnivå		Överbetygsnivå
	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	
12.4	5, 7	11, 18	15, 16
12.5	1, 3, 7, 11, 15	17, 19, 31	21, 24, 33
12.6	5, 7, 19	11, 17, 18	21, 25
12.7	3, 7, 11, K: 9, 10	17, 19, 21a-d	20, 21e, 27, 29
12.9	1, 5, 7 (grad 2 räcker)		13
13.1	3, 5, K: 11a-c	7, 24, K: 12d	17, 27, 28, 29

Veckans kryssuppgifter: 12.3.27, 12.5.17, 12.6.19, 12.7.7

Lärmål:

För att bli godkänd på kursen skall du kunna:

Adams	Mål
12.4 12.5	beräkna partiella derivator av högre ordning genom att tillämpa deriveringsregler för funktioner av en variabel samt kedjeregeln.
12.6	beräkna linjäriseringen och differentialen för en reellvärd funktion och utnyttja dessa till approximativ beräkning av funktionsvärden.
12.6	beräkna Jacobimatrisen och differentialen för en vektorvärd funktion och utnyttja denna till approximativ beräkning av funktionsvärden.
12.7	beräkna gradient och riktningsderivata $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a})$ då $\|\mathbf{u}\| = 1$ (med sats 12.7.7) till en funktion av två eller tre variabler samt utnyttja deras egenskaper (se definition 12.7.7, markerad ruta s 718) vid problemlösning (se t.ex. exempel 3 och 4).
12.7	bestämma ekvationer för tangentlinje och normallinje till nivåkurva samt tangentplan och normallinje till nivåyta (se sats 12.7.6 och t.ex. exempel 6).
12.9	beräkna taylorpolynom av ordning två, till funktioner av två variabler, både genom att utgå från Taylors formel och genom att utnyttja kända Taylorpolynom i en variabel (jmf. exempel 1 och 2).
13.1	definiera begreppen lokalt maximum/minimum, sadelpunkt, globalt maximum/minimum, kritisk punkt och singulär punkt.
13.1	bestämma kritiska/stationära punkter för $f(x, y)$, där ekvationssystemet $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$ är relativt enkelt samt klassificera de kritiska punkterna med hjälp av sats 13.1.3 eller remark s 748.

För överbetyg skall du också kunna:

Adams	Mål
12.6	definiera begreppet differentierbar funktion.
12.6	redogöra för relationerna mellan egenskaperna för en funktion: kontinuerlig, kontinuerliga partiella derivator samt differentierbar
12.6	formulera och bevisa kedjeregeln för $g \circ f$ då $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ och $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ samt formulera kedjeregeln på matrisform för $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ då $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ och $\mathbf{g} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ (se sid. 709).
12.7	definiera begreppen gradient och riktningsderivata, redogöra för och bevisa deras egenskaper (sats 12.7.6, sats 12.7.7 samt markerad ruta s 718).
12.8	visa att en ekvation eller ett system av ekvationer lokalt definierar en funktion implicit samt beräkna funktionens partiella derivator.
12.8	känna till sambandet mellan Jacobideterminanten till en transformation och Jacobideterminanten till inversen (sid. 733).
12.9	bestämma taylorpolynom till implicit definierad funktion.
13.1	bestämma kritiska/stationära punkter för $f(x, y)$, där ekvationssystemet $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$ är mer komplicerade, samt klassificera de kritiska punkterna med hjälp av taylorutveckling av andra ordningen (se t.ex exempel 13.1.5).