TMA043 Flervariabelanalys E2, läsåret 2013/14
Vecko–PM läsvecka 5

Calculus: Kapitel 15

Denna vecka riktar vi vår uppmärksamhet åt kapitel 15 som till stor del handlar om *vektorfält* och dess tillämpningar (avs 15:1,2,4,6). Vektorfält dyker upp naturligt inom många områden (se sid 807) t.ex. för att beskriva olika typer av krafter (gravitation, magnetiska, elektrostatiska mm) eller flöden (av vätska, gas, energi mm). Per definition är ett vektorfält (i rummet) en funktion $\mathbf{F}$ från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^3$ och en naturlig tolkning är att $\mathbf{F}(x, y, z)$, som alltså är en vektor i $\mathbf{R}^3$, beskriver hastigheten hos en partikel i ett visst flöde som befinner sig i punkten (x, y, z). En partikel som rör sig i rummet med en hastighet som bestäms av ett visst vektorfält följer en kurvbana som kallas *fältlinje* (även kallad strömlinje eller kraftlinje, beroende på sammanhang).

I avsnitt 15.2 skall vi studera en speciell klass av vektorfält som kallas *konservativa*. Det är vektorfält $\mathbf{F}$ som är gradienten av någon reelvärd funktion $\phi(x, y, z)$ dvs. $\mathbf{F} = \nabla\phi$. Funktionen ϕ sägs i så fall vara en (skalär) *potential* till vektorfältet. Som vi skall se har sådana konservativa vektorfält flera användbara egenskaper, och de spelar en viktig roll i teorin om vektorfält. Avsnitt 15.4 och 15.6 innehåller några viktiga tillämpningar på vektorfält. Vi skall bl.a. se hur man med en s.k. *kurvintegral* (även kallad linjeintegral) kan beräkna det arbete som ett visst kraftfält utför på en partikel som rör sig utefter en given kurva i rummet. Vidare skall vi se hur man med en s.k. *flödesintegral* kan beräkna hur mycket av ett visst flöde som passerar genom en given yta per tidsenhet. Även i nästa vecka skall vi analysera vektorfält då kapitel 16 står på agendan. Titeln på det kapitlet är just vektoranalys och där finns en del viktiga satser/egenskaper om vektorfält samlade.

Utöver ovan nämnda innehåll, där vektorfält spelar en central roll, så kommer vi denna vecka även rikta uppmärksamhet åt avsnitt 15.3 och 15.5 som innehåller några andra viktiga tillämpningar på integraler. I avsnitt 15.3 skall vi se hur man kan beräkna massa och tyngdpunkt av en tunn (krökt) tråd som är belagd med en given (varierande) densitet och i avsnitt 15.5 skall vi se hur man med *ytintegraler* kan beräkna area, massa och tyngdpunkt av ytor.

Rekommenderade uppgifter

Avsnitt	Godkäntnivå		Överbetygsnivå
	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	
15.1	3, 6 (rita fältet, fältlinjer och nivåkurvor till $f(x, y) = x^2 - y$ i samma fig.)		
15.2	1, 3, 4, 5		9
15.3	2, 3, 7	9	
15.4	1, 3, 4, 5, 14,	7, 9, 15, 17, CR.7	21, 22, 23
15.5	K: 13, 14, 15	3, 17, 20, 23, K:16	4, 7, 9, 13, 15
15.6	1, 5, 9	11	2, 15, 17

Veckans kryssuppgifter: 15.2.9, 15.3.3, 15.4.7, 15.5.17

Lärmål:

För att bli godkänd på kursen skall du kunna:

Adams	Mål
15.1	skissa ett vektorfält i planet, skissa fältlinjer till det och redogöra för sambandet mellan vektorfält och fältlinjer.
15.2	definiera begreppet *konservativt vektorfält i ett område* och beräkna *potential* till ett konservativt fält.
15.2	känna till nödvändiga villkor för att ett vektorfält skall vara konservativt (sid 851) och med hjälp av dessa kunna visa att ett givet vektorfält inte är konservativt.
15.2	förklara sambandet mellan nivåkurvor till potential och fältlinjerna till ett konservativt vektorfält.
15.3	definiera begreppet *kurvintegral av en funktion* och beräkna sådana integraler genom parametrisering av kurvan.
15.4	definiera begreppet *kurvintegral av ett vektorfält* och beräkna sådana integraler genom parametrisering av kurvan.
15.4	tillämpa satsen om kurvintegralers oberoende av integrationsvägen.
15.5	parametrisera sfärer, cylindrar, koner, plan och funktionsytor.
15.5	definiera begreppet *ytintegral av en funktion över en yta* och beräkna sådana integraler då ytan är parametriserad eller av vanligare typ som du själv bör kunna parametrisera.
15.6	definiera begreppet *flödesintegral (flöde av ett vektorfält genom en orienterad yta)* och beräkna sådana integraler då ytan är parametriserad eller av vanligare typ som du själv bör kunna parametrisera.
15.3-6	tillämpa kurv- och ytintegral för att bestämma t.ex. längd, arbete, area, massa, masscentrum laddning och flöde (se t.ex. övn 15.3.9, 15.4.12, 15.5.17, 15.5.20, 15.5.23, 15.6.9, 15.6.11, 15.CR.7).

För överbetyg skall du också kunna:

Adams	Mål
15.1	bestämma fältlinjer till vektorfält i planet.
15.4	definiera begreppen *område, sammanhängande område* och *enkelt samanhängande område.*
15.4	formulera satsen om kurvintegralers oberoende av integrationsvägen och bevisa att om vektorfältet är konservativt så är kurvintegralen oberoende av integrationsvägen.
15.5	beräkna ytintegral av en funktion över en nivåyta (se t.ex. 15.5.4).
15.6	beräkna flödesintegral över en nivåyta (se t.ex. 15.6.2).
15.3-6	motivera definitionerna av begreppen kurvintegral av funktion/vektorfält, ytintegral av en funktion och flödesintegral (till exempel genom att ge exempel på tillämpning och förklaring av varför integraltypen kan utnyttjas i exemplet).