

2006-03-11: Lösningar till Överbetyssuppgifterna

1(f). Låt $P \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Eftersom P är en ortogonalmatris har vi å ena sidan att

$$\left\| P \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| \Rightarrow x^2 + y^2 = 1, \quad (1)$$

och å andra sidan att

$$P \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot P \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow 5y = 3. \quad (2)$$

Från (1) och (2) härleder vi att $y = 3/5$, $x = \pm 4/5$.

SVAR: $P \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm 4/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}$, det finns två möjligheter alltså.

5(a). Vi väljer en bas $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{n}\}$ där $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ spänner upp planet, medan att $\mathbf{n}$ är en normal till planet. T.ex. välj

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Matrisen för T i denna bas är

$$[T]_{\mathcal{B}} = D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Om $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = [1, 2, 3]^T$ då har vi att

$$[T(\mathbf{x})]_{\mathcal{B}} = D \cdot [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

(b). Frågan är otydlig men förmodligen menas matrisen för basbytet från $\mathcal{B}$ till $\mathcal{E}$, snarare än tvärtom. Då har vi att

$$P = {}_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{B}} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{n}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sedan har vi

$$\mathbf{x} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} = {}_{\mathcal{E}}\overleftarrow{\mathcal{B}}^P \cdot [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix},$$

medan att

$$T(\mathbf{x}) = [T(\mathbf{x})]_{\mathcal{E}} = {}_{\mathcal{E}}\overleftarrow{\mathcal{B}}^P \cdot [T(\mathbf{x})]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix},$$

(c). Det som gäller är att

$$M = PDP^{-1} = \dots = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

OBS! Det ingick inte i uppgiften att beräkna M .

6(a). FALSKT. Se t.ex. uppgift 2.1.10 i Lays bok.

(b). SANT. För då är A inverterbar och man kan vänster-multiplicera i båda leden med A^{-1} .

(c). SANT. För i så fall måste $\mathbf{b}$ vara en linjärkombination av kolumnerna i A , dvs $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är konsekvent.

(d). FALSKT. T.ex. tag $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, som representerar en skevning i $\mathbb{R}^2$.

Man kan kontrollera att $\lambda = 4$ är enda egenvärdet och att $V_4 = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

(e). SANT. För en symmetrisk matris är alltid diagonaliserbar.

(f). FALSKT. Om A är en 6×3 matris så är $\text{Col}(A)$ ett underrum i $\mathbb{R}^6$ av dimension högst 3. Därmed är dess ortogonala komplement $(\text{Col}(A))^{\perp}$ ett underrum i $\mathbb{R}^6$ av dimension minst $6 - 3 = 3$.

7. Antag att

$$\sum_{i=1}^p c_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}. \quad (3)$$

Vi måste bevisa att $c_1 = \dots = c_p = 0$. Betrakta c_i för ett visst i . Om vi tar skalärprodukten av båda leden i (3) med $\mathbf{v}_i$ så får vi att

$$\sum_{j=1}^p c_j (\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{v}_i) = 0. \quad (4)$$

Men eftersom vektorerna är ortogonala mot varandra så har vi att $\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{v}_i = 0$ för varje $j \neq i$. Dessutom är $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = \|\mathbf{v}_i\|^2$. Insättning i (4) ger $c_i \|\mathbf{v}_i\|^2 = 0$. Men $\|\mathbf{v}_i\|^2 \neq 0$ eftersom $\mathbf{v}_i$ är en nollskild vektor. Därför måste $c_i = 0$, v.s.v.
(OBS! Se också Sats 6.2.4 i Lays bok).