

2006-08-26: Lösningar till Överbetyssuppgifterna

6(a). FALSKT. Om det finns oändligt många lösningar för *något* högerled då måste det finnas en fri variabel i A 's trappstegsform, och däremot kommer det att finnas antingen inga eller oändligt många lösningar för varje högerled.

(b). SANT. För nu finns det en pivot i varje kolumn i A 's trappstegsform.

(c). FALSKT. Ibland kan det råka stämma men oftast inte. Se t.ex. uppgift 3.2.42 i Lays bok.

(d). SANT. Se Sats 4.7.15 i Lays bok.

(e). SANT. B och AB har samma antal kolumner, oberoende av huruvida A är inverterbar eller ej. Om nu A är inverterbar så har B och AB dessutom samma nollrum - för om $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ så måste $AB\mathbf{x} = A(B\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, medan att om $AB\mathbf{x} = \mathbf{0}$ så är $B\mathbf{x} = A^{-1}(AB\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Så vi har två matriser med samma nollrum och samma antal kolumner. Rangsatsen (Sats 4.6.14 i Lay) innebär att de har samma rang.

(f). SANT. För om F är en injektiv linjär avbildning från ett vektorrum till sig självt, så måste den också vara surjektiv. Notera att detta är bara ett mer sofistikerat sätt att säga att kolumnerna till en $n \times n$ matris A spänner upp $\mathbb{R}^n$ om och endast om $\text{Nul}(A) = \{\mathbf{0}\}$.

7(b). λ är ett egenvärde till A om och endast om det finns en nollskild vektor $\mathbf{x}$ sådan att $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, dvs om och endast om $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Eftersom $\mathbf{x}$ är nollskild innebär detta att matrisen $A - \lambda I$ är inte inverterbar och därmed är $\det(A - \lambda I) = 0$, v.s.v.