MATEMATIK **Hjälpmedel: ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa**
Chalmers tekniska högskola Datum: 100114 kl. 08.30–12.30
Tentamen Telefonvakt: Fredrik Lindgren
0703 088 304

TMV140 Linjär algebra Z

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 20 poäng på tentamens första del (godkäntdelen) Bonuspoäng från duggor 2009 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt.
För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 30 resp. 40 poäng sammanlagt på tentamens två delar.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.
Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, därefter granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket kortfattade lösningar och svar skall skrivas. **Endast svar ger inga poäng**. Detta blad **lossas och inlämnas som blad 1 tillsammans med övriga lösningar.** (10p)

Till följande uppgifter skall fullständiga och väl motiverade lösningar inlämnas.

2. (a) Lös ekvationssystemet (3p)

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 4 \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 7 \\ -3x_1 - 7x_2 + 8x_3 = -5 \end{cases}$$

(b) Skriv vektorn $\begin{bmatrix} 4 & 7 & -5 \end{bmatrix}^T$ som linjärkombination av vektorerna $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -7 \end{bmatrix}^T$ och $\begin{bmatrix} -5 & -8 & 8 \end{bmatrix}^T$. (2p)

(c) Är $\{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 3 & 4 & -7 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -5 & -8 & 8 \end{bmatrix}^T\}$ en linjärt oberoende mängd av vektorer? Motivera ditt svar. (1p)

3. (a) Ge exempel på 2×2-matriser A och B sådana att $AB \neq BA$ (1p)

(b) Lös matrisekvationen $AA^TX - X = AB^T$ där $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. (5p)

4. Låt V vara det underrum i $\mathbb{R}^3$ som spänns upp av vektorerna $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ och $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}^T$. Bestäm den ortogonala projektionen av vektorn $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T$ på V. Bestäm avståndet från $\mathbf{x}$ till V. (6p)

5. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (4p)

(a) För 3×3 matriser gäller att $\det(A - B) = \det(A) - \det(B)$.

(b) Egenvärdena till en triangulär matris ligger på dess huvuddiagonal.

(c) Om A är en 9×10 matris så är ett ekvationssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ meningsfullt då $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{10}$.

(d) Om A är en 9×10 matris så är $\mathrm{Nul}(A)$ ett ick-trivialt underrum i $\mathbb{R}^{10}$.

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. (a) Visa att avbildningen $F : \mathbb{P}_2[x] \to \mathbb{P}_2[x]$ som definieras genom (6p)

$$F(f(x)) = xf'(x) + f(x+1)$$

är linjär.

(b) Bestäm F:s matris i basen $\{1, x, x^2\}$.

(c) Bestäm F:s matris i en bas som består av egenvektorer.

7. (a) Definiera vad som menas med en *symmetrisk* matris. (6p)

(b) Definiera begreppen *egenvärde* och *egenvektor* till en matris.

(c) Visa att om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är egenvektorer som hör till olika egenvärden till den symmetriska matrisen A så är $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ ortogonala.

8. (a) Bevisa att en matris A är inverterbar om och endast om $\det A \neq 0$. (6p)

(b) Vilka värden kan determinanten av en inverterbar matris A anta om både A och A^{-1} har heltalskoefficienter ?

(c) Låt A vara en kvadratisk matris. Bevisa att om A^2 har egenvärde λ^2 så blir λ eller $-\lambda$ egenvärde för matrisen A.

Motivera dina svar.

Good luck dude!
Peter H

Anonym kod	TMV140 Linjär algebra Z 100114	sid.nummer	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar och svar redovisas på anvisad plats.

(a) Avgör om matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & -7 & -5 & 0 \\ 3 & 8 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & 5 \end{bmatrix}$ är inverterbar. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Vektorerna $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ är egenvektorer till matrisen $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$. Ange en matris P och en diagonalmatris D så att $A = PDP^{-1}$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Matriserna $A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$, $B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$ och $C = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ är totalmatriser till tre ekvationssystem. Ange lösningarna till dessa ekvationssystem. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(d) Visa att $\mathcal{B} = \{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T\}$ är en bas för $\mathbb{R}^3$. Bestäm koordinaterna i standardbas för den vektor $\mathbf{u}$ vars koordinatvektor $\begin{bmatrix} \mathbf{u} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$. Bestäm koordinatvektorn $\begin{bmatrix} \mathbf{v} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$ för vektorn $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$ (2p)

Lösning:

Svar: ....

(e) Vektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}^T$ spänner upp ett plan i $\mathbb{R}^3$. Bestäm en ortonormerad bas för detta plan (2p)

Lösning:

Svar: ....

Lösningar

1. (a) The sequence of row operations

$$R_1 \mapsto \frac{1}{2}R_1, \quad R_2 \mapsto R_2 - R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - 3R_1,$$
$$R_3 \mapsto 7R_3 + 8R_2, \quad R_4 \mapsto R_4 + R_2,$$

transforms A to the echelon form

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -7 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -116 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Since this matrix has no zeroes on the main diagonal, it follows that A is invertible.

(b) One checks that

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -18 \end{bmatrix} = 6 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix},$$

Hence the eigenvalues corresponding to the given eigenvectors are 2 and 6 respectively. Thus $A = PDP^{-1}$ where

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

(c) Let's call the three variables x, y and z. The first system has the general solution $z = 1,\ x + y = -1$. The second system has the general solution $z = 0,\ x + y = 1$. The third system has no solutions.

(d) Let's kill two birds with one stone here by working straight away with the augmented matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

The sequence of row operations

$$R_2 \mapsto R_2 + R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - R_2,$$

produces the echelon form

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{array}\right].$$

Since the left-hand side has no row of zeroes, we see that $\mathcal{B}$ is a basis for $\mathbb{R}^3$. The unique solution of the system is $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = -2$, which implies that $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = [1\ 2\ -2]^T$. Finally, the coordinates for $\mathbf{u}$ in the standard basis are given by

$$\mathbf{u} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(e) Set

$$\mathbf{v}_2' := \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{||\mathbf{v}_1||^2}\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{6}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Then $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2'\}$ is an orthogonal basis for the plane. It remains to normalise. Set

$$\mathbf{u}_1 := \frac{\mathbf{v}_1}{||\mathbf{v}_1||} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}_2 := \frac{\mathbf{v}_2'}{||\mathbf{v}_2'||} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

so that $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ is an orthonormal basis for the plane.

2. (a) First write the system in matrix form as

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & 4 \\ 1 & 4 & -8 & 7 \\ -3 & -7 & 8 & -5 \end{array}\right].$$

The sequence of row operations

$$R_2 \mapsto R_2 - R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 + 3R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - 2R_2,$$

results in the echelon form

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

The left-hand side is triangular, and back substitution gives the unique solution

$$x_3 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = -1.$$

(b)

$$-\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 \\ -8 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

(c) Yes, since the echelon form of the matrix with these vectors as its columns is triangular, as shown in part (a).

3. (a) If you pick two matrics at random then they'll probably work. Here's a fairly simple example : $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. One may check that $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, whereas $BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) We can write the system as

$$(AA^T - I_3)X = AB^T. \qquad (1)$$

First compute

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [1\ 0\ 1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Secondly,

$$AA^T - I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

This matrix is clearly invertible, which means that (1) has the unique solution

$$X = (AA^T - I_3)^{-1}(AB^T). \tag{2}$$

So, thirdly, we invert the matrix $AA^T - I_3$. We consider the augmented matrix

$$[AA^t - I_3|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

The row operations $R_1 \leftrightarrow R_3$, $R_2 \mapsto -R_2$ transform this to

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Hence the matrix $AA^T - I_3$ is its own inverse. Fourthly,

$$AB^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [1\ 3] = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Substituting everything into (2) we find that

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

4. The easiest way to solve this problem is to observe immediately that V is just the xz-plane. Hence the only thing that matters about the vector $\mathbf{x}$ is its y-coordinate. Thus $\mathbf{x}$ is at distance 2 from the plane V and its projection onto V is the vector $[1\ 0\ 3]^T$.

5. (a) Totally false dude !.

(b) True. See Theorem 1 in Section 5.1 in the book.

(c) False. Rather $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^9$.

(d) True.

6. (a) Derivation is linear, so is evaluation at $x + 1$. It follows that F is linear. Can't be bothered writing out the excruciatingly boring details !

(b) We have

$$\begin{aligned} F(1) &= x \cdot 0 + 1 = 1, \\ F(x) &= x \cdot 1 + (x + 1) = 2x + 1, \\ f(X^2) &= x \cdot (2x) + (x + 1)^2 = 3x^2 + 2x + 1. \end{aligned}$$

Hence the matrix for F in the basis $\{1, x, x^2\}$ is

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(c) In a basis of eigenvectors, the matrix of F will be a diagonal matrix with the eigenvalues along the diagonal. But note that the matrix above is already triangular, so its eigenvalues are already along the diagonal. Hence the matrix of F in a basis of eigenvectors will be

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix},$$

where $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ is some permutation of $(1, 2, 3)$, depending on how we order the eigenvectors.

7. (a) A is said to be symmetric if $A = A^T$.

(b) The complex number λ is said to be an eigenvalue of the $n \times n$ matrix A if the equation $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ has a non-zero solution $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Any such non-zero solution is called an eigenvector of A.

(c) See the proof of Theorem 1 in Section 7.1 in the book.

8. (a) See section 3.2 in the book.

(b) Note that $\det(A^{-1}) = \frac{1}{detA}$. But if a matrix has only integer entries then its determinant must also be an integer (since it can be computed by a cofactor expansion). Hence both $\det A$ and $\frac{1}{\det A}$ must be integers, which leaves as the only possibilities ± 1.

(c) Suppose A is an $n \times n$ matrix. Since λ^2 is an eigenvalue of A^2, it follows that

$$\det(A^2 - \lambda^2 I_n) = 0. \tag{3}$$

But now note that

$$A^2 - \lambda^2 I_n = A^2 - (\lambda I_n)^2 = (A - \lambda I_n)(A + \lambda I_n). \tag{4}$$

Since the determinant of a product equals the product of the determinants (Theorem 6, Section 3.2), it follows from (3) and (4) that either $\det(A - \lambda I_n) = 0$ or $\det(A + \lambda I_n) = 0$, in other words that either λ or $-\lambda$ respectively is an eigenvalue of A.