MATEMATIK **Hjälpmedel: ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa**
Chalmers tekniska högskola Datum: 090827 kl. 08.30–12.30
Tentamen Telefonvakt: Jacob Sznajdman
0762-721860

TMV140 Linjär algebra Z

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 20 poäng på tentamens första del (godkäntdelen) Bonuspoäng från duggor 2009 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt.
För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 30 resp. 40 poäng sammanlagt på tentamens två delar.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (10p)

2. (a) Lös ekvationssystemet (3p)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 14 \end{cases}$$

(b) Skriv vektorn $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 14 \end{bmatrix}^T$ som linjärkombination av vektorerna $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}^T$ och $\begin{bmatrix} -2 & -4 & 4 \end{bmatrix}^T$. (2p)

(c) Är $\{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -2 & -4 & 4 \end{bmatrix}^T\}$ en linjärt oberoende mängd av vektorer? Motivera ditt svar. (1p)

3. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm en ortogonal matris P och en diagonalmatris D sådana att $A = PDP^T$. (4p)

(b) Beräkna A^{10} (OBS! Man kan lämna potenser av tal i svaret). (2p)

4. (a) Förklara vad som menas med en *bas* för ett underrum i $\mathbb{R}^n$. (2p)

(b) Basen $\mathcal{B}$ för $\mathbb{R}^2$ består av vektorerna $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 7 & 2 \end{bmatrix}^T$ och basen $\mathcal{C}$ för $\mathbb{R}^2$ består av vektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix}^T$. (4p)

Bestäm basbytesmatrisen (koordinatbytesmatrisen) $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$ samt koordinatvektorn $[\mathbf{w}]_{\mathcal{C}}$, där $\mathbf{w} = \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2$.

5. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (4p)

(a) V är ett underrum i $\mathbb{R}^2$ där $V = \{\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 1\}$.

(b) Låt $\mathbf{v} := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$. Då gäller att W är ett underrum i $\mathbb{R}^3$ där $W = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{0}\}$.

VÄND!

(c) Om A och B är inverterbara $n \times n$ matriser sådan att $A^2B^2 = (AB)^2$ så måste också $AB = BA$.

(d) Om A är en 3×3 matris så gäller att $\det(2A) = 2\det(A)$.

Del 2: Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. Låt $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som geometriskt betyder spegling i planet $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$. Bestäm F:s matris i standardbasen. (6p)

7. (a) Vad är det som menas med en *minstakvadratlösning* till ett ekvationsystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$? (1p)

(b) Skriv ner och bevisa en formel för den allmänna minstakvadratlösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. (3p)

(c) Låt (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{b} := \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Bestäm minstakvadratlösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ samt ange den vektor i A:s kolonnrum som ligger närmast $\mathbf{b}$.

8. (a) Det är känt att för godtyckliga $n \times n$ matriser A och B så gäller att $(AB)^T = B^T A^T$. Bevisa detta för 2×2 matriser. (2p)

(b) Låt A vara en inverterbar $n \times n$ matris. Bevisa att A^T är också inverterbar. (2p)

(c) Låt A vara en $n \times n$ matris som uppfyller att $A^3 = O_n$, nollmatrisen. Bevisa att matrisen $I_n - A$ är inverterbar samt ange en formel för dess invers i termer av A. (2p)

Onnea!

Peter H

Anonym kod	**TMV140 Linjär algebra Z** 090827	sid.nummer	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Invertera matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (2p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Bestäm LU-faktoriseringen till matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 9 \\ 3 & 9 & 10 & 2 \end{bmatrix}$ (2p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som ges av (2p)

$$T(\mathbf{e}_1) = 3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \quad T(\mathbf{e}_2) = 2\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2.$$

Ange matrisen för T och beräkna $T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}\right)$.

Lösning:

Svar: ....

VÄND!

(d) Bestäm rangen till matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$. Ange även dimensionen av $\mathrm{Nul}(A)$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(e) Visa att $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ i $\mathbb{R}^3$ är ortogonala. Bestäm sedan projektionen av $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$ på planet som spänns upp av $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

Lösningar

1. (a) We work on the augmented matrix $[A|I_3]$. One may verify that the sequence of row operations

$$R_2 \mapsto R_2 + R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - 2R_2, \quad R_1 \mapsto 2R_1 + R_3,$$
$$R_2 \mapsto 2R_2 + R_3, \quad R_1 \mapsto \frac{1}{2}R_1, \quad R_2 \mapsto \frac{1}{2}R_2, \quad R_3 \mapsto -\frac{1}{2}R_3,$$

transforms A to I_3 and thus I_3 to A^{-1}, and that

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & -1 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 3/2 & 1 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

(b) The sequence of row operations

$$R_2 \mapsto R_2 - 2R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - 3R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 + R_2,$$

produces the echelon form

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}.$$

Hence, also

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Matrisen för T kan skrivas ner direkt och ges av

$$M_T = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Därefter gäller att

$$T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -17 \end{bmatrix}.$$

(d) Då vi utför radoperationerna

$$R_2 \mapsto R_2 - R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - 2R_1, \quad R_4 \mapsto R_4 - R_1,$$
$$R_3 \mapsto R_3 - R_2, \quad R_4 \mapsto R_4 + R_2, \quad R_4 \mapsto R_4 - R_3,$$

så erhålls trappstegsformen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Därmed ser vi att $\text{rang}(A) = 3$ och att $\dim(\text{Nul}(A)) = 4 - 3 = 1$.

(e) $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0$ och därför är $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2$. Låt $\mathcal{P}$ beteckna planet som spänns upp av $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$. Då gäller att

$$\text{proj}_{\mathcal{P}}\underline{\mathrm{v}} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_1}{||\mathbf{v}_1||^2}\mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_2}{||\mathbf{v}_2||^2}\mathbf{v}_2$$
$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{6}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2. (a) First write the system in matrix form as

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 14 \end{array}\right].$$

The sequence of row operations

$$R_2 \mapsto R_2 - R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 + 3R_2,$$

results in the echelon form

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Hence there is a free variable, say x_3. Back substitution gives

$$x_2 = 2x_3 - 3, \quad x_1 = 11 - 2x_3.$$

Hence the general solution to the system is given by

$$\left[\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array}\right]^T \in \{\left[\begin{array}{ccc} 11 & -3 & 0 \end{array}\right]^T + x_3 \left[\begin{array}{ccc} -2 & 2 & 1 \end{array}\right]^T : x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

(b) We can use any solution of the system above. For example, choosing $x_3 = 1$ gives the solution $\left[\begin{array}{ccc} 9 & -1 & 1 \end{array}\right]^T$, and this implies that

$$9 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

(c) No. There's a row of zeroes in the echelon matrix.

3. (a) Vi måste diagonalisera A. Dess karakteristiska ekvation lyder

$$(1-\lambda)^2 - 9 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0,$$

som har de två rötterna $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -2$. Näst hittar vi motsvarande egenvektorer.

$\lambda_1 = 4$: Vi har

$$A - 4I_2 = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Man ser tydligt att en egenvektor är $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$\lambda_2 = -2$: Vi har

$$A + 2I_2 = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Man ser tydligt att en egenvektor är $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

I vår diagonalisering vi vill ha en ortogonal matris P så vi väljer normaliserade egenvektorer enligt

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Då har vi att $A = PDP^T$ där

$$P = [\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

(b)

$$A^{10} = PD^{10}P^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4^{10} & 0 \\ 0 & 2^{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \cdots = 2^9 \cdot \begin{bmatrix} 2^{10}+1 & 2^{10}-1 \\ 2^{10}-1 & 2^{10}+1 \end{bmatrix}.$$

4. (a) Låt W vara ett underrum i $\mathbb{R}^n$ och $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$ vara vektorer i W. Dessa sägs utgöra en *bas* till W om de är linjärt oberoende och spänner upp W.

(b) Koordinatbytematrisen ${}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}^{\ P}$ beräknas enligt

$${}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}^{\ P} = {}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{E}}^{\ P}\,{}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}^{\ P} = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2]^{-1}[\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2]$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{bmatrix}.$$

Det är givet är att $\mathbf{w}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T$. Vi söker $\mathbf{w}_{\mathcal{C}}$. Det gäller att

$$\mathbf{w}_{\mathcal{C}} = {}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}^{\ P}\,\mathbf{w}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75 \\ -44 \end{bmatrix}.$$

(ANMÄRKNING : $\mathbf{w} = \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 = 75\mathbf{v}_1 - 44\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 18 & 5 \end{bmatrix}^T$.)

5. (a) Falskt. Mängden V är varken sluten under addition eller skalärmultiplikation. T.ex. både $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ och $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ ligger i V, men inte deras summa $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

(b) Sant. Kryssprodukten av två nollskilda vektorer är nollvektorn om och endast om vektorerna är parallela. Därför sammanfallar mängden W med linjen genom origo som har $\mathbf{v}$ som en riktningsvektor.

(c) Sant. Eftersom både A och B är inverterbara kan vi kancellera A från vänster och B från höger i ekvationen $A^2B^2 = (AB)^2$ och därmed härleda att $AB = BA$.

(d) Falskt. Snarare gäller att $\det(2A) = 2^3 \det(A) = 8 \det(A)$.

6. Recall (Matlab 1) that if $\mathbf{n}$ is a normal to the plane then, for any $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ we have the formula

$$F(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - 2\left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\right)\mathbf{n}. \tag{1}$$

For the plane in this exercise, we may take $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T$, so $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 6$. The columns of the matrix for F are formed by the vectors $F(\mathbf{i}), F(\mathbf{j}), F(\mathbf{k})$. Using (1), one then readily computes the matrix to be

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

7. (a) It is a vector $\hat{\mathbf{x}}$ such that $A\hat{\mathbf{x}}$ is the orthogonal projection of $\mathbf{b}$ onto the column space of A.

(b) The formula reads $A^TA\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$. For a proof, see Section 6.5 of the book or your lecture notes.

(c) Man först beräknar

$$A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 13 \end{bmatrix}, \quad A^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ 23 \end{bmatrix}.$$

Matrisen $A^T A$ är inverterbar och därmed finns det en unik minstakvadratlösning

$$\hat{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Den vektor i kolonnrummet som ligger närmast **b** är vektorn

$$A\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

8. (a) Skriv

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}.$$

Först har vi då att

$$AB = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix} \Rightarrow (AB)^T = \begin{bmatrix} ae + bg & ce + dg \\ af + bh & cf + dh \end{bmatrix}.$$

Å andra sidan är

$$B^T A^T = \begin{bmatrix} e & g \\ f & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ea + gb & ec + gd \\ fa + hb & fc + hd \end{bmatrix}.$$

Så det är bara att konstatera att, visst, $(AB)^T = B^T A^T$.

(b) Låt B vara inversen till A s.a. $AB = BA = I_n$. Vi hävdar att B^T är inversen till A^T. För, enligt (a), $A^T B^T = (BA)^T = I_n^T = I_n$ och på samma sätt, $B^T A^T = (AB)^T = I_n^T = I_n$.

(c) Jag påstår att

$$(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2.$$

För det är bara att observera att

$$(I_n - A)(I_n + A + A^2) = (I_n + A + A^2) - (A + A^2 + A^3) = I_n - A^3 = I_n, \text{ ty } A^3 = 0_n.$$