Lösningar TMA682 Tillämpad Matematik K2/Bt2, 5 poäng, 04-11-23

1. Låt x vara minstakvadrat lösningen av $Ax \approx b$ med residualen $r = b - Ax$, och

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Vilka av följande vektorer kan vara en tänkbar residual r?

$$a. \quad \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad b. \quad \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad c. \quad \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Lösning: Vektorn Ax är en linjär kombinationen av kolonnvektorer; a_1 och a_2, i A. Residualen $r = b - Ax$ är ortogonal mot båda a_1 och a_2. Dvs, vi behöver kontrollera om a, b, eller c är ortogonal mot båda a_1 och a_2.

$$a \cdot a_1 = [-2 \;\; 1 \;\; 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 0, \qquad a \cdot a_2 = [-2 \;\; 1 \;\; 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 4 \neq 0 \Longrightarrow$$

a kan inte vara residual vektor

$$b \cdot a_1 = [-4 \quad 1 \quad -2] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = -8 \neq 0, \qquad b \cdot a_2 = [-4 \quad 1 \quad -2] \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

b kan inte vara residual vektor

$$c \cdot a_1 = [-4 \quad -1 \quad 2] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 0, \qquad c \cdot a_2 = [-4 \quad -1 \quad 2] \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

c är en tänkbar residual vektor

2. Lös följande differentialekvation för $t \geq 0$ med hjälp av Laplacetransform

$$y'(t) + 3y(t) = \sin(t), \qquad y(0) = -1.$$

Lösning:

$$y(t) \supset Y(s), \qquad y'(t) \supset sY(s) - y(0) = sY(s) + 1, \qquad \sin(t) \supset \frac{1}{s^2+1}.$$

Varför Laplacetransform ger

$$sY(s) + 1 + 3Y(s) = \frac{1}{s^2+1} \Longrightarrow (s+3)Y(s) = \frac{1}{s^2+1} - 1 = \frac{-s^2}{s^2+1}.$$

Alltså

$$Y(s) = \frac{-s^2}{(s^2+1)(s+3)}.$$

Partialbråksuppdelning av högerled:

$$\frac{-s^2}{(s^2+1)(s+3)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{C}{s+3} = \frac{(A+C)s^2 + (3A+B)s + 3B + C}{(s^2+1)(s+3)}.$$

Identifiering av koefficienter ger

$$\begin{cases} 3B + C &= 0 \Longrightarrow C = -3B \quad (i) \\ 3A + B &= 0 \overset{(i)}{\Longrightarrow} B = -3A \Longrightarrow C = 9A \quad (ii) \\ A + C &= -1 \overset{(ii)}{\Longrightarrow} A + 9A = -1. \end{cases}$$

Vi får alltså

$$A = \frac{-1}{10}, \quad B = \frac{3}{10}, \quad C = \frac{-9}{10},$$

dvs

$$Y(s) = \frac{-1}{10}\frac{s}{s^2+1} + \frac{3}{10}\frac{1}{s^2+1} - \frac{9}{10}\frac{1}{s+3}$$

Inverstransform ger

$$y(t) = \frac{1}{10}(3\sin t - \cos t - 9e^{-3t}).$$

3. Bestäm den linjära interpolanten av

$$f(x) = \frac{4}{\pi^2}x^2 + \cos(x), \qquad -\pi \le x \le \pi,$$

där intervallet $[-\pi, \pi]$ delas in i 4 lika delintervall.

Lösning:

Med 4 lika delintervall får vi noderna: $x_0 = -\pi$, $x_1 = -\pi/2$, $x_2 = 0$, $x_3 = \pi/2$ och $x_4 = \pi$. Observera att eftersom f är en jämn funktion, räcker det att bestämma interpolanten på, t.ex. högre halvan av intervallet $[-\pi, \pi]$ och sedan spegela på y-axeln. Vidare, högre nodernas funktionsvärde är:

$$f(0) = 1, \quad f(\pi/2) = 1 = f(-\pi/2) \quad f(\pi) = 3 = f(-\pi).$$

Om nu $\Pi_1 f$ är den linjära interpolanten så blir det

$$\begin{aligned} \Pi_1 f(x) &= 1, && -\pi/2 \le x \le \pi/2 \\ \Pi_1 f(x) &= Ax + B, && \pi/2 < x < \pi \\ \Pi_1 f(x) &= Cx + D, && -\pi < x < -\pi/2, \end{aligned}$$

där A, B, C och D är konstanter.

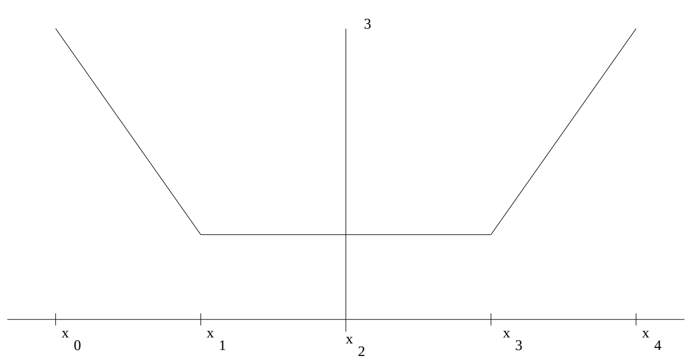
$$\begin{aligned} \Pi_1 f(\pi/2) &= 1 && \Longrightarrow \tfrac{\pi}{2}A + B = 1 \\ \Pi_1 f(\pi) &= 3 && \Longrightarrow \pi A + B = 3. \end{aligned}$$

Detta ger $A = 4/\pi$ och $B = -1$. På samma sätt får vi

$$\begin{aligned} \Pi_1 f(-\pi/2) &= 1 && \Longrightarrow \tfrac{-\pi}{2}C + D = 1 \\ \Pi_1 f(-\pi) &= 3 && \Longrightarrow -\pi C + D = 3. \end{aligned}$$

Alltså $C = -4/\pi$ och $D = -1$. Eller

$$\Pi_1 f(x) = \begin{cases} -1 - \frac{4}{\pi}x, & -\pi \le x \le -\pi/2 \\ 1, & -\pi/2 \le x \le \pi/2 \\ -1 + \frac{4}{\pi}x, & \pi/2 \le x \le \pi. \end{cases}$$



4. (a) Bestäm den analytiska lösningen till randvärdesproblemet

$$-u''(x) + u(x) = 1, \quad 0 \le x \le 1, \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

(b) Dela in intervallet i 3 lika delintervall med noderna $x_0 = 0$, $x_1 = 1/3$, $x_2 = 2/3$ och $x_3 = 1$. Beräkna för hand den styckvis linjära finita element lösningen U på denna partition.

Lösning: (a) $u''(x) + u'(x) = 1$ har karakteristiska ekvationen: $-r^2 + r = 0$, med rötterna $r_1 = 0$ och $r_2 = 1$. Därför är

$$u_h(x) = C_1 + C_2 e^x,$$

en homogen lösning. Vidare, har ekvationen en partikulärlösning som $u_p(x) = Ax$. Insättning av partikulärlösningen i ekvationen ger $A = 1$. Alltså, vi har att:

$$u(x) = u_h(x) + u_p(x) = C_1 + C_2 e^x + x.$$

Randdata ger

$$\begin{aligned} u(0) = &\quad C_1 + C_2 = 0, \\ u(1) = &\quad C_1 + C_2 e + 1 = 0, \end{aligned}$$

som har lösningen $C_1 = \frac{1}{e-1}$ och $C_2 = \frac{-1}{e-1}$. Alltså exakta lösningen är:

$$u(x) = x + \frac{1}{e-1}\Big(1 - e^x\Big).$$

(b) Med homogena randdata och partitionen $x_0 = 0$, $x_1 = 1/3$, $x_2 = 2/3$, $x_3 = 1$, behöver vi bara basfunktioner φ_1 och φ_1 med $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3, 4$:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 3x, & 0 \le x \le 1/3, \\ -3x + 2, & 1/3 \le x \le 2/3 \\ 0, & 2/3 \le x \le 1, \end{cases} \qquad \varphi_2(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 1/3, \\ 3x - 1, & 1/3 \le x \le 2/3 \\ -3x + 3, & 2/3 \le x \le 1. \end{cases}$$

Variationsformuleringen är

$$(VF) \qquad \int_0^1 u'v'\,dx + \int_0^1 u'v\,dx = \int_0^1 v\,dx, \quad \forall v \in V_h,$$

där $V_h \subset H_0^1$ så att

$$V_h = \{v : v \text{ är styckvis linjör, kontinuerlig }, v(0) = v(1) = 0\}.$$

Vi söker FE lösningen $U(x) \in V_h$ som uppfyller (VF). Dvs vi söker

$$(1) \qquad U(x) = \xi_1 \varphi_1(x) + \xi_2 \varphi_2(x),$$

sä att

$$(FEM) \qquad \int_0^1 U'v'\,dx + \int_0^1 U'v\,dx = \int_0^1 v\,dx, \quad \forall v \in V_h.$$

Nu genom att völja v som basfunktioner φ_1 och φ_2, och stoppa in U från (1) i (FEM) får vi följande matris ekvation för att bestämma nodvärdena $\xi_1 = U(x_1)$ och $\xi_2 = U(x_2)$:

$$\begin{bmatrix} \int_0^1 \varphi_1'\varphi_1' & \int_0^1 \varphi_1'\varphi_2' \\ \int_0^1 \varphi_2'\varphi_1' & \int_0^1 \varphi_2'\varphi_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_0^1 \varphi_1\varphi_1' & \int_0^1 \varphi_1\varphi_2' \\ \int_0^1 \varphi_2\varphi_1' & \int_0^1 \varphi_2\varphi_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^1 \varphi_1 \\ \int_0^1 \varphi_2 \end{bmatrix}.$$

I vänster ledet ovan färsta koefficientmatrisen är våran massmatris och den andra är convektionsmatrisen. Allså vi har att

$$1/3 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}.$$

v.g.v.

Detta skriver i kompakt form som

$$\begin{bmatrix} 6 & -5/2 \\ -7/2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} 6 & 5/2 \\ 7/2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix},$$

Där $D = 36 - 35/4$. Allså är $\xi_1 = 17/6D$ och $\xi_2 = 19/6D$, och vi har

$$U(x) = \frac{17}{6D}\varphi_1(x) + \frac{19}{6D}\varphi_2(x),$$

dvs

$$U(x) = \begin{cases} \frac{17}{6D}(3x) = \frac{17}{2D}x, & 0 \le x \le 1/3, \\ \frac{17}{6D}(-3x+2) + \frac{19}{6D}(3x+1) = \frac{1}{D}(x+\frac{5}{2}), & 1/3 \le x \le 2/3 \\ \frac{19}{6D}(-3x+3) = \frac{19}{2D}(-x+1) & 2/3 \le x \le 1. \end{cases}$$

5. Bestäm den 2π-periodiska Fourierserie-utvecklingen av $f(x)$ i problem 3.

Lösning: f är en jämn funktion; därfär $b_n = 0$ för alla $n = 1, 2, \ldots$. Vi räknar nu

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx.$$

Vi har att

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\Big(\frac{4}{\pi^2}x^2 + \cos(x)\Big)\,dx. = \frac{2}{\pi}\frac{4}{\pi^2}\Big[\frac{x^3}{3}\Big]_0^{\pi} = \frac{8}{3},$$

och

$$(2)\qquad \begin{aligned} a_n =& \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\Big(\frac{4}{\pi^2}x^2 + \cos(x)\Big)\cos(nx)\,dx \\ =& \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{4}{\pi^2}x^2\cos(nx)\,dx + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x)\cos(nx)\,dx := I + II. \end{aligned}$$

Vi har att

$$(3)\qquad \begin{aligned} I =& \frac{2}{\pi}\frac{4}{\pi^2}\Big(\Big[x^2\frac{\sin(nx)}{n}\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(2x)\frac{\sin(nx)}{n}\,dx\Big) \\ =& -\frac{16}{\pi^3}\Big(\Big[x\frac{-\cos(nx)}{n^2}\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{-\cos(nx)}{n^2}\,dx\Big) \\ =& -\frac{16}{n^2\pi^3}\pi\Big(-cos(n\pi)\Big) = \frac{16}{n^2\pi^2}(-1)^n, \end{aligned}$$

och

$$I_2 = \begin{cases} 0, & n \ne 1 \\ 1, & n = 1. \end{cases}$$

Alltså, vi får

$$a_1 = 1 - \frac{16}{\pi^2}, \qquad a_n = \frac{16}{n^2\pi^2}(-1)^n, \quad n = 2, 3, \ldots.$$

Därför Fourierserie-utvecklingen av $f(x)$ blir då

$$f(x) = \frac{4}{3} + \Big(1 - \frac{16}{\pi^2}\Big)\cos(x) + \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx.$$

6. och **7.** See föreläsningsanteckningar.

MA