Matematik Chalmers

Tentamen i TMA682 Tillämpad matematik K2/Bt2, 2007–08–29

Telefon: Anna Nyström: 0762-721860
Hjälpmedel: Endast utdelad tabell för Laplacetransformer. Kalkylator ej tillåten.

---

1. Bestäm den linjära interpolanten av

$$f(x) = \frac{1}{\pi^2}(x-\pi)^2 - \cos^2(x - \frac{\pi}{2}), \qquad -\pi \le x \le \pi,$$

där intervallet $[-\pi, \pi]$ delas in i 4 lika delintervall.

2. Sök med Laplacetransformation en funktion $y(t)$ som satisfierar ekvationen

$$y''(t) - 2y(t) = 8\cos t \sinh t, \qquad y(0) = y'(0) = 0.$$

3. Bevisa en a priori feluppskattning för $cG(1)$-finitelementlösning av randvärdesproblemet

$$-u''(x) + bu'(x) + u(x) = f(x), \quad x \in I := [0,1]; \qquad u(0) = u(1) = 0, \qquad b > 0,$$

i energinormen: $||v||_E$ med $||v||_E^2 = ||v||^2_{L_2(I)} + ||v'||^2_{L_2(I)}$. För vilka b värden är felet optimalt?

4. a) Använd variabelseparationsmetoden och lös ekvationen

$$\begin{cases} u_t - c^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & \quad t > 0 \\ u(x,0) = \sin(\pi x) + \frac{1}{2}\sin(3\pi x), & 0 < x < 1. \end{cases}$$

5. Funktionen $f(x)$ är definierad enligt

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 < x < \pi/2 \\ 0, & x > \pi/2. \end{cases}$$

Utveckla $f(x)$ i cosinusserie med perioden 2π. Ange speciellt de 6 första termerna i serien som är $\neq 0$.

6. Visa, att om funktionen f är 2π-periodisk och styckvis kontinuerlig på $[-\pi, \pi]$ med de komplexa Fourierkoefficienterna C_n, så gäller Bessels olikhet

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta.$$

7. Betrakta värmeledningsekvationen

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u_x(1,t) = 0, \qquad u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

Visa följande stabilitetsuppskattningar:

$$I. \quad \frac{d}{dt}||u||^2 + 2||u'||^2 = 0, \qquad II. \quad ||u(\cdot,t)|| \le e^{-t}||u_0||.$$

MA

$$\begin{aligned} \sin a \sin b &= \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)] \\ \sin a \cos b &= \frac{1}{2}[\sin(a-b) + \sin(a+b)] \\ \cos a \cos b &= \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)] \end{aligned}$$

Table of Laplace Transforms

$f(t)$	$F(s)$
$af(t)+bg(t)$	$aF(s)+bG(s)$
$tf(t)$	$-F'(s)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
$f(t-T)\theta(t-T)$	$e^{-Ts}F(s)$
$f'(t)$	$sF(s)-f(0)$
$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-\sum_{k=1}^{n} s^{n-k}f^{(k-1)}(0)$
$\int_0^t f(\tau)\,d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
$\theta(t)$	$\frac{1}{s}$
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\cos bt$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
$\sin bt$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
$\frac{t}{2b}\sin bt$	$\frac{s}{(s^2+b^2)^2}$
$\frac{1}{2b^3}(\sin bt - bt\cos bt)$	$\frac{1}{(s^2+b^2)^2}$

TMA682 Tillämpad matematik K2/Bt2, 2007–08–29. Lösningar.

---

1. Vi har att: $f(-\pi) = 4, \quad f(-\pi/2) = 5/4, \quad f(0) = 1, \quad f(\pi/2) = -3/4, \quad f(\pi) = 0,$
och elementär kalkyl ger den linjära interpolnaten som:

$$\Pi_1 f(x) = \begin{cases} 4 - 11(x+\pi)/(2\pi), & -\pi \le x \le -\frac{\pi}{2}, \\ 5/4 - (x + \frac{\pi}{2})/(2\pi), & -\frac{\pi}{2} \le x \le 0, \\ 1 - 7x/(2\pi), & 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ 3(x-\pi)/(2\pi), & \frac{\pi}{2} \le x \le \pi. \end{cases}$$

2. Observera att : $y(0-) = y'(0-) = 0$, och högerledet är $8\cos t \sinh t = 4(e^t \cos t - e^{-t}\cos t)$.
Laplacetransformering av ekvationen ger

$$s^2 Y(s) - 2Y(s) = 4\Big[\frac{s-1}{(s-1)^2+1} - \frac{s+1}{(s+1)^2+1}\Big],$$

dvs

$$(s^2-2)Y(s) = 4\frac{(s-1)[(s+1)^2+1] - (s+1)[(s-1)^2+1]}{[(s-1)^2+1][(s+1)^2+1]} = 4\frac{2(s^2-2)}{[(s-1)^2+1][(s+1)^2+1]}$$

Vi anväder partialbråksuppdelning

$$Y(s) = \frac{As+B}{s^2-2s+2} + \frac{Cs+D}{s^2+2s+2}.$$

och därmed, genom identifiering av koefficienter, får ekvationssystemet:

$$\begin{cases} A & & +C & & = 0 & (I); & \text{koefficienten av } s^3 \\ 2A & +B & -2C & +D & = 0 & (II); & \text{koefficienten av } s^2 \\ 2A & +2B & +2C & -2D & = 0 & (III); & \text{koefficienten av } s^1 \\ & 2B & & +2D & = 8 & (IV); & \text{koefficienten av } s^0. \end{cases}$$

$(III) - 2(I) \Longrightarrow B = D$, värför från (IV) får vi att $B = D = 2$. Vidare $(I) \Longrightarrow C = -A$, så

$$\begin{cases} A & +C & = 0 & (I) \\ 4A & +4 & = 0 & (II') \end{cases} \Longrightarrow A = -1, \; C = 1.$$

Alltså

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{-s+2}{(s-1)^2+1} + \frac{s+2}{(s+1)^2+1} \\ &= -\frac{s-1}{(s-1)^2+1} + \frac{1}{(s-1)^2+1} + \frac{s+1}{(s+1)^2+1} + \frac{1}{(s+1)^2+1}. \end{aligned}$$

Därmed

$$y(t) = (-\cos t + \sin t)e^t + (\cos t + \sin t)e^{-t} = 2(\sin t \cosh t + \cos t \sinh t), \quad t > 0.$$

3. Multiplicera ekvationen med en testfunktion $v \in H_0^1 = \{v : ||v||_E < \infty, \; v(0) = v(1) = 0\}$, patialintegrera över I och använd randdata för att får *variationsformulering*: Finn $u \in H_0^1(I)$ så att

$$(1) \qquad \int_I (u'v' + bu'v + uv) = \int_I fv, \quad \forall v \in H_0^1(I).$$

En *Finitelement Metod* med $cG(1)$ kan formuleras som: Finn $U \in V_h^0$ så att

$$(2) \qquad \int_I (U'v' + bU'v + Uv) = \int_I fv, \quad \forall v \in V_h^0 \subset H_0^1(I),$$

där

$$V_h^0 = \{v : v \text{ styckvis linjär och kontinuerlig i en partition av } I, \; v(0) = v(1) = 0\}.$$

Låt $e = u - U$, då (1)-(2) ger att

$$(3) \qquad \int_I (e'v' + be'v + ev) = 0, \quad \forall v \in V_h^0, \qquad \text{(Galerkin Ortogonalitet)}.$$

Observera att $e(0) = e(1) = 0 \Longrightarrow$

$$(4) \qquad \int_I e'e = \frac{1}{2}\int_I \frac{d}{dx}(e^2) = \frac{1}{2}(e^2)|_0^1 = 0.$$

A priori feluppskattning: Vi använder (3) och (4) och skriver

$$\begin{aligned}
\|e\|_{H_0^1} = \|e'\|^2_{L_2(I)} + \|e\|^2_{L_2(I)} &= \int_I (e'e' + ee) = \{(4)\} = \int_I (e'e' + be'e + ee) \\
&= \int_I \Big(e'(u-U)' + be'(u-U) + e(u-U)\Big) = \{v = \pi_h u - U \text{ i } (3)\} \\
&= \int_I \Big(e'(u-\pi_h u)' + be'(u-\pi_h u) + e(u-\pi_h u)\Big) \le \{\text{enligt C-S}\} \le \\
&\le \|(u-\pi_h u)'\|\|e'\| + b\|u-\pi_h u\|\|e'\| + \|u-\pi_h u\|\|e\| \\
&\le \{\|(u-\pi_h u)'\| + (1+b)\|u-\pi_h u\|\}\|e\|_{H^1} \\
&\le C_i\{\|hu''\| + (1+b)\|h^2u''\|\}\|e\|_{H^1}.
\end{aligned}$$

Alltså har en a priori feluppskattningen viz;

$$\|e\|_{H_0^1} \le C_i\{\|hu''\| + (1+b)\|h^2u''\|\}.$$

Felet är minimalt om $b \equiv 0$.

4. a) Låt $u(x,t) = X(x)T(t) \neq 0$. PDEn kan nu skrivas som $T'(t)X(x) = c^2T(t)X''(x)$, vilket ger

$$(5) \qquad \frac{T'(t)}{c^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda.$$

eller

$$\begin{aligned} T'(t) - c^2\lambda T(t) &= 0 \\ X''(x) - \lambda X(x) &= 0 \end{aligned}$$

Med Dirichlet randdata har vi att $\lambda < 0$ och karakteristiska ekvationen för X är $r^2 = \lambda$, med rötterna $r = \pm i\sqrt{-\lambda}$. Alltså vi kan skriva

$$(6) \qquad T(t) = Ae^{c^2\lambda t}, \qquad X(x) = C\cos\sqrt{-\lambda}\,x + D\sin\sqrt{-\lambda}\,x.$$

Därmed alla funktioner

$$u(x,t) = e^{c^2\lambda t}[C\cos\sqrt{-\lambda}\,x + D\sin\sqrt{-\lambda}\,x],$$

med C och D konstanter ($\lambda < 0$ godtycklig) satisfierar differentialekvationen. Randvillkoren ger

$$u(0,t) = Ce^{c^2\lambda t} = 0 \Longrightarrow C = 0, \qquad u(1,t) = De^{c^2\lambda t}\sin\sqrt{-\lambda} = 0.$$

Med $D \neq 0$ (annars får vi endast den triviala lösningen) har vi att $\sin\sqrt{-\lambda} = 0$, vilket ger $\sqrt{-\lambda} = n\pi$, $n = 1, 2, \ldots$, och vi har egenvärden och egenfunktionerna

$$(7) \qquad \lambda = -n^2\pi^2, \quad X_n(x) = \sin n\pi x, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

vs att vi har en "lösningsprofil" som

$$(8) \qquad u_n(x,t) = D_n e^{-(n\pi c)^2 t}\sin(n\pi x).$$

Med superposition kan vi skriva lösningen som

$$(9) \qquad u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{-(n\pi c)^2 t}\sin(n\pi x).$$

För att bestämma D_n använder vi begynnelsevillkoret

$$(10) \qquad u(x,0) = \sin(\pi x) + \frac{1}{2}\sin(3\pi x).$$

För enkelhetsskull skriver vi

$$(11) \qquad u(x,0) = f(x),$$

och använder (9) för att få

$$(12) \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin(n\pi x).$$

Identifiering av högerleden i (10) och (11) (enligt (12)) ger

$$(13) \qquad D_1 \sin(\pi x) + D_2 \sin(2\pi x) + D_3 \sin(3\pi x) + \ldots = \sin(\pi x) + \frac{1}{2}\sin(3\pi x).$$

Med identifiering av koefficienter i (13) får vi att

$$D_1 = 1, \quad D_2 = 0, \quad D_3 = 1/2, \quad D_4 = D_5 = \ldots = 0,$$

och slutligen, enligt (9), är lösningen

$$u(x,t) = e^{-(\pi c)^2 t}\sin(\pi x) + \frac{1}{2}e^{-(3\pi c)^2 t}\sin(3\pi x).$$

5. För utveckling av $f(x)$ i cosinusserie definierar vi $f(x)$ även för $t \le 0$ så att $f(x)$ blir en jämn funktion. Vi har då

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx,$$

där, för $k \neq 1$,

$$\begin{aligned}\pi a_k &= 2\int_0^{\pi/2} sinx \cos(kx)\,dx = \int_0^{\pi/2}\Big(\sin(k+1)x - \sin(k-1)x\Big)\,dx \\ &= \Big[\frac{\cos(k-1)x}{k-1} - \frac{\cos(k+1)x}{k+1}\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\cos(k-1)\pi/2}{k-1} - \frac{\cos(k+1)\pi/2}{k+1} - \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k+1}.\end{aligned}$$

Då är

$$\pi a_{2n} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1} = -\frac{2}{4n^2-1},$$

och

$$\pi a_{2n+1} = \frac{\cos n\pi - 1}{2n} - \frac{\cos(n+1)\pi - 1}{2n+2} = \frac{(-1)^n - 1}{2n} - \frac{(-1)^{n+1} - 1}{2n+2},$$

vilket betyder att

$$\pi a_{4m+1} = \frac{(-1)^{2m} - 1}{4m} - \frac{(-1)^{2m+1} - 1}{4m+2} = \frac{1}{2m+1}$$

och

$$\pi a_{4m+3} = \frac{(-1)^{2m+1} - 1}{4m+2} - \frac{(-1)^{2m+2} - 1}{4m+4} = -\frac{1}{2m+1}.$$

Vidare är

$$\pi a_1 = 2\int_0^{\pi/2} \sin x \cos x\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin 2x\,dx = \Big[-\frac{\cos 2x}{2}\Big]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Alltså är

$$\begin{aligned}f(x) &\sim \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2m+1}\Big(\cos(4m+1)x - \cos(4m+3)x\Big) - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1} \\ &= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi}\cos x - \frac{2}{3\pi}\cos 2x - \frac{1}{\pi}\cos 3x - \frac{2}{15\pi}\cos 4x + \frac{1}{3\pi}\cos 5x - \ldots\end{aligned}$$

6 och **7** Se *Föreläsningsanteckningar.*

MA