Hjälpmedel: Utdelad tabell för Laplacetransformer

BERÄKNINGSMATEMATIK
Chalmers tekniska högskola

Telefon: Christoffer Cromvik: 0762-721860
2005–10–22 kl. 8.30-12.30

TMA682 Tillämpad Matematik K2/Bt2, 5 poäng

OBS! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. Betrakta ekvationen

$$\dot{u}(t) - u(t) = 0, \quad 0 < t < 1; \qquad u(0) = 1.$$

Bestäm dess globala Galerkin approximation: $U(t) = \sum_{j=0}^{q} \xi_j t^j$, då

(a) $q = 1$, (b) $q = 2$.

2. Lös följande integro-differentialekvationen med hjälp av Laplacetransformation:

$$y'(t) + 4y(t) + 5\int_0^t y(\tau)\,d\tau = e^{-t} \quad (t > 0), \qquad y(0) = 0.$$

3. (a) Utveckla $f = |\sin x|$ i Fourierserie.

(b) Använd (a) och bestäm summan av följande serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}.$$

4. Betrakta randvärdesproblemet:

$$-u''(x) = 2, \quad 0 < x < 1, \qquad u'(0) = u'(1) = 1. \tag{1}$$

Låt $x_0 = 0$, $x_1 = 1/2$ och $x_2 = 1$ vara en partition av intervallet $[0, 1]$ och V_h, $(h = 1/2)$ motsvarande finitelement funktionsrum bestående av styckvis kontinuerlig, linjära funktioner.

(a) Bestäm den exakta lösningen till (1).

(b) Beräkna, om möjligt, en finitelement approximation $U \in V_h$ av u.

(c) Förklara varför problemet i (1) kallas *illa ställd*?

5. Bestäm lösningen till följande inhomogena värmeledningsproblem:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < \pi, & t > 0, \\ u(0,t) = 1, & u(\pi, t) = -1, & t > 0, \\ u(x,0) = \cos x, & 0 < x < \pi. & \end{cases}$$

6. Formulera och bevisa *Bessel's olikhet* (I).

7. Härled en a *priori* feluppskattning för Poissons ekvation:

$$-u''(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \qquad u(0) = u'(1) = 0.$$

MA