Konvergenshastigheter hos Markovkedjor
Laboration 1: slumpvandring på en ”cirkel”

Olle Häggström

Betrakta Markovkedjan med tillståndsrum $\mathbf{Z} \bmod k$ (dvs $\{0, 1, \ldots, k-1\}$) och följande övergångsmekanism: vid varje tidsenhet tar kedjan ett steg upp, ett steg ner eller stannar där den är, vardera med sannolikhet $\frac{1}{3}$. Tillstånden 0 och $k-1$ är sammankopplade så att vi hamnar i 0 när vi tar ett steg ”upp” från $k-1$, och i $k-1$ när vi tar ett steg ”ner” från 0.

Denna kedja är irreducibel och aperiodisk, med stationär fördelning

$$\pi = {}^k\pi = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}, \ldots, \frac{1}{k}\right) .$$

(Eller hur?)

Låt oss nu starta den i ett fixt tillstånd, säg 0, och låt $\mu^{(n)} = {}^k\mu^{(n)}$ beteckna fördelningen vid tid n. Vi är intresserade av hur fort $d_{TV}(\mu^{(n)}, \pi)$ går mot noll.

Med hjälp av formeln

$$d_{TV}(\mu^{(n)}, \pi) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k-1} |\mu_i^{(n)} - \pi_i|$$

kan vi räkna exakt på detta problem. Skriv ett program som gör detta, och plotta hur $d_{TV}(\mu^{(n)}, \pi)$ avtar som en funktion av n för några olika värden på k. Helst stora värden: $k = 100$ och $k = 1000$ är betydligt intressantare än $k = 3$ eller 4...

Om vi skalar x-axeln med k^2, kan man då se om det verkar som om kurvan

$$d_{TV}({}^k\mu^{(ak^2)}, {}^k\pi)$$

som en funktion av a har något asymptotiskt utseende då $k \to \infty$? Går det i så fall att karaktärisera denna gränsfunktion? (Den sista frågan är eventuellt ganska svår. Det är OK att, efter ett allvarligt försök att självständigt förstå detta, kontakta mig eller någon kurskamrat för att få en ledtråd!)