Existens av svaga lösningar

De klassiska randvärdesproblemen kan abstrakt beskrivas som ett minimeringsproblem:

(M) Finn $v \in V$ som minimerar

$$F(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - L(v)$$

- V är ett linjärt rum av funktioner med norm $\|\cdot\|$.
- $L : V \to \mathbb{R}$ är en linjär funktional som är kontinuerlig: $|L(v)| \le C_1 \|v\|$, $v \in V$
  en konstant $C_1 < \infty$
- $a : V \times V \to \mathbb{R}$ är en bilinjär funktional som är
  1. kontinuerlig: $|a(u,v)| \le C_2 \|u\| \cdot \|v\|$, $u, v \in V$
  2. elliptisk: $a(v,v) \ge \alpha \|v\|^2$, $v \in V$
     konstant > 0.
  3. symmetrisk: $a(u,v) = a(v,u)$, $u, v \in V$.

Om minimum antas i $u \in V$, så måste "riktningsderivatan" i riktning $\varphi \in V$ vara noll i u:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(u+\varepsilon\varphi) - F(u)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon a(u,\varphi) - \varepsilon L(\varphi) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 a(\varphi,\varphi)}{\varepsilon}$$

$$= a(u,\varphi) - L(\varphi) = 0 \quad \text{för alla } \varphi \in V.$$

Så u löser variationsproblemet:

(V) Finn $u \in V$ sådan att

$$a(u,\varphi) = L(\varphi) \quad \text{för alla } \varphi \in V.$$

Speciellt finns högst 1 minimum: Om $u_1, u_2 \in V$ båda löser (M), således (V), låt $u = u_1 - u_2$. Då gäller

$a(u,\varphi) = 0$, $\forall \varphi$. Välj $\varphi = u \Rightarrow a(u,u) = 0 \underset{2}{\Rightarrow} u = 0$.

Målet är att visa existens av minimum $u \in V$.

<u>Sats</u>: Om V är ett Hilbertrum, så existerar $u \in V$ som löser (M).

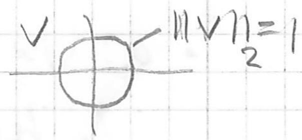
Innan beviset diskuterar vi begreppet Hilbertrum.

(1) Normen $\|\cdot\|$ ska vara given av en <u>inre produkt</u>: $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$

<u>Ex</u>: två-dimensionella exempel $V = \mathbb{R}^2$ är

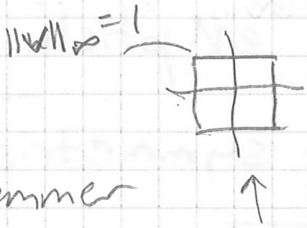
- $\|(u_1, u_2)\|_2 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ $\quad \langle (u_1, u_2), (v_1, v_2)\rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2$

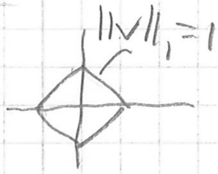
  Detta ger ett två dimensionellt Hilbertrum där "enhetssfären" är rund



- $\|(u_1, u_2)\|_\infty = \max(|u_1|, |u_2|)$

  eller t ex





- $\|(u_1, u_2)\|_1 = |u_1| + |u_2|$

  är två normer som inte kommer från en inre produkt. Icke-runda "enhetssfärer"

(2) Då nu V är ett oändligdimensionellt rum av funktioner, kräver vi att V ska vara <u>fullständigt</u>: Varje Cauchyföljd (v_k) i V, dvs
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N < \infty \; \forall n, m \geq N : \|v_n - v_m\| \leq \varepsilon$,
kräver vi konvergerar mot något $v \in V$,
dvs $\exists v \in V : \|v_k - v\| \to \infty$ då $k \to \infty$.

<u>Ex</u>: $\mathbb{Q} = \{\text{bråktal } \frac{a}{b}\}$ är inte fullständigt:
T.ex. finns (q_k) rationella tal som bildar en Cauchyföljd i $\mathbb{Q}$, men som konvergerar mot $\sqrt{2}$, som inte är ett rationellt tal.
"$\mathbb{Q}$ är fullt av hål".

Analogt kan liknande hål förkomma i enhetssfären $\{v \in V;\ \|v\| = 1\}$ i V, då $\dim V = \infty$. Vi kräver att så ej är fallet:

V är <u>Hilbertrum</u>: Normen är given av en skalärprodukt och V är fullständigt.
(Rund enhetssfär utan hål.)

V är <u>Banachrum</u>: Godtycklig norm, men V antas vara fullständigt.
(Enhetssfär utan hål, möjligtvis "kantig".)

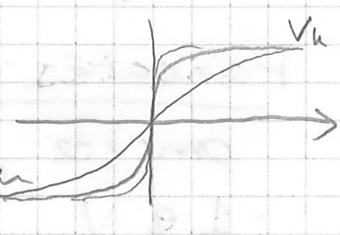
<u>Exempel på Hilbertrum:</u>

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, t ex $n = 1, 2$ el. 3, betecknar en öppen mängd.

1. <u>$L_2(\Omega)$</u>.

Inre produkten $\langle u, v \rangle_{L_2} = \int_\Omega u(x)v(x)\,dx$
ger normen
$$\|u\|_{L_2} = \left(\int_\Omega |u(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$$

$V = \{\text{kontinuerliga } u : \Omega \to \mathbb{R}\}$ är inte fullständigt med avseende på $\|\cdot\|_{L_2}$



Om t ex $\Omega = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$ och
$v_k(x) = \arctan(kx)$, är
(v_k) Cauchy, men gränsfunktionen är ej kontinuerlig.

Inte ens $V = \{\text{Riemannintegrerbara } u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ med } \|u\|_{L_2} < \infty\}$ är fullständigt m a p $\|\cdot\|_{L_2}$!

$L_2(\Omega) := \{\text{Lebesgueintegrerbara } u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ med } \|u\|_{L_2} < \infty\}$
<u>är</u> ett Hilbertrum. Se fortsättningskurs i integrationsteori.

2. Sobolevrummet $H^1(\Omega)$.

Inre produkten $\langle u,v\rangle_{H^1} := \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv)\, dx$

ger normen

$$\|u\|_{H^1} = \left(\int_\Omega (|\nabla u|^2 + u^2)\, dx \right)^{1/2}.$$

$$H^1(\Omega) := \{ u \in L_2(\Omega) \; ; \; \underbrace{\tfrac{\partial u}{\partial x_i}}_{\text{i distributionsmening!}} \in L_2(\Omega) \,, \; i=1,\dots,n \}$$

är ett Hilbertrum med norm $\|u\|_{H^1}$.

Vi är garanterade existens av svaga lösningar till Neumannproblemet i $H^1(\Omega)$.

3. $H^1_0(\Omega) := \{ u \in H^1(\Omega) \; ; \; \underbrace{u = 0}_{\text{i en svag mening}} \text{ på } \partial\Omega \}$

är ett slutet underrum av $H^1(\Omega)$, och därmed ett Hilbertrum.

Svaga lösningar till Dirichletproblemet existerar i $H^1_0(\Omega)$.

För $u \in H^1_0(\Omega)$ kan vi ekvivalent använda normen $\|u\|_{H^1_0} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2}$ pga följande.

<u>Poincarés olikhet</u>: Antag $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ begränsat sammanhängande område, $V \subset H^1(\Omega)$ slutet underrum och $1 \notin V$. Då är

$$\int_\Omega |u(x)|^2 dx \le \underbrace{C}_{\text{en konstant } < \infty} \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx \quad \text{för alla } u \in V.$$

<u>Ex</u>: $V = H^1_0(\Omega)$

eller

$V = \{ u \in H^1(\Omega) \; ; \; \int_\Omega u\, dx = 0 \}$.

Bevis av satsen:

Låt $m := \inf_{u \in V} F(u)$.

Då $F(u) = \frac{1}{2} a(u,u) - L(u) \geq \frac{\alpha}{2} \|u\|^2 - c_1 \|u\|$
$= \frac{\alpha}{2} \left(\|u\| - \frac{c_1}{\alpha} \right)^2 - \frac{c_1^2}{2\alpha} \geq - \frac{c_1^2}{2\alpha}$

så är $m > -\infty$.

Tag en följd av funktioner $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ i V sådana att $F(u_k) \to m$, $k \to \infty$.

Vi vill visa att (u_k) är en Cauchyföljd i V, för om så är fallet finns en gränsfunktion u och $F(u) = \lim_{k \to \infty} F(u_k) = m$, då F är kontinuerlig och V är fullständigt.

Tag $\varepsilon > 0$.

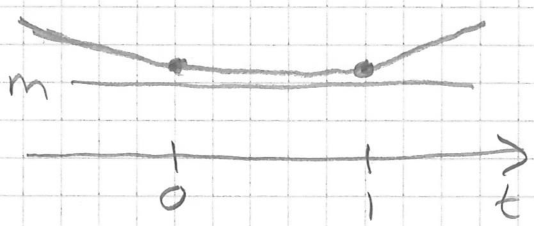
Låt k, j vara så stora att

$F(u_k) \leq m + \varepsilon$ och $F(u_j) \leq m + \varepsilon$.

Betrakta linjen i V som går genom u_k och u_j.

$$f(t) := F(u_k + t(u_j - u_k))$$
$$= \underbrace{\tfrac{1}{2} a(u_j - u_k, u_j - u_k)}_{=: a_1} \cdot t^2 + \underbrace{\left(a(u_k, u_j - u_k) - L(u_j - u_k) \right)}_{=: a_2} \cdot t$$
$$+ \underbrace{\left(\tfrac{1}{2} F(u_k, u_k) - L(u_k) \right)}_{=: a_3} = a_1 t^2 + a_2 t + a_3$$

är ett andragradspolynom.



$f(0) = F(u_k) \leq m + \varepsilon$

$f(1) = F(u_j) \leq m + \varepsilon$

$f(t) \geq m$ för alla $t \in \mathbb{R}$.

Figur antyder $a_1 \approx 0$.

Vi beräknar därför följande diskreta andraderivata av f:

$$\underbrace{f(0)}_{\le m+\varepsilon} + \underbrace{f(1)}_{\le m+\varepsilon} - 2\underbrace{f(\tfrac{1}{2})}_{\ge m} = a_3 + (a_1 + a_2 + a_3) - 2(\tfrac{1}{4}a_1 + \tfrac{1}{2}a_2 + a_3)$$
$$= \tfrac{1}{2}a_1$$

$$\Rightarrow a_1 \le 4\varepsilon$$

$$\Rightarrow \|u_j - u_k\|^2 \le \frac{1}{\alpha} a(u_j - u_k, u_j - u_k)$$
$$= \frac{1}{\alpha} 2a_1 \le \frac{8}{\alpha}\varepsilon \approx 0.$$

Detta visar att u_j och u_k är nära varandra då j och k är stora, d v s $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ är en Cauchyföljd.

Detta visar existensen av minimum u till minimeringsproblemet (M) i Hilbertrum $\blacksquare$