Fourierserier och periodiska funktioner

Kom ihåg: I linjär algebra betraktas n-dimensionella vektorrum V. Givet en bas $\{e_k\}_{k=1}^n$ kan varje vektor $v \in V$ skrivas entydigt som en linjärkombination $v = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$. Detta ger en 1-1 korrespondens mellan den "abstrakta" vektorn v och dess koordinater $a_1, \ldots, a_n$. Det är dessa tal $a_k \in \mathbb{R}$ vi räknar med.

Den grundläggande idén i harmonisk analys är att på liknande sätt analysera funktioner $f(x)$ genom att dela upp $f(x)$ som en funktionsserie

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k(x),$$

där $e_1(x), e_2(x), e_3(x), \ldots$ är en given uppsättning basfunktioner. På detta sätt betraktas $f(x)$ som ett objekt i ett oändligdimensionellt funktionsrum V. Mer om detta på FÖ 2.

Ämnet harmonisk analys har sin början i teorin om Fourierserier, vilket är ämnet för första halvan av kursen. I detta fall är basfunktionerna $\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ de trigonometriska funktionerna $\cos(k\omega x)$, $\sin(k\omega x)$ och funktionsrummet V består av alla T-periodiska funktioner $f(x)$.

Defn: En funktion $f(x)$ definierad på $\mathbb{R}$ sägs vara T-periodisk om $f(x+T) = f(x)$ för alla $x \in \mathbb{R}$. Motsvarande vinkelfrekvens är $\omega := \frac{2\pi}{T}$.

OBS: • Funktionerna $\cos(k\omega x)$, $\sin(k\omega x)$ såväl som den komplexvärda funktionen $e^{ik\omega x} = \cos(k\omega x) + i\sin(k\omega x)$ är T-periodiska för varje heltal k.

1:2 • Om $f(x)$ är T-periodisk så är

$$\int_0^T f(x)\,dx = \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,dx = \int_a^{a+T} f(x)\,dx, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Den grundläggende idén i teorin om Fourierserier är att varje T-periodisk funktion $f(x)$ kan uttryckes i Fourierserie

$$(1) \quad \boxed{f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)\right)},$$

där koefficienterna a_k och b_k är unikt bestämda av f. Vår huvuduppgift i kursen är att ~~förstå~~ ~~för~~ vilka $f(x)$ dette gäller och i vilken mening funktionsserien i högerledet konvergerar mot $f(x)$.

Av tekniske skäl föredrar man ofte att skriva (1) på komplex form:

$$(2) \quad \boxed{f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ik\omega x}}$$

<u>Övn:</u> Vise med Eulers formler att om

$$a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x) = \hat{f}_k e^{ik\omega x} + \hat{f}_{-k} e^{-ik\omega x}, \quad \forall x$$

så är

$$\begin{cases} a_k = \hat{f}_k + \hat{f}_{-k} \\ b_k = i(\hat{f}_k - \hat{f}_{-k}) \end{cases} \iff \begin{cases} \hat{f}_k = \frac{1}{2}(a_k - i b_k) \\ \hat{f}_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + i b_k) \end{cases}$$

$k = 1, 2, 3, \ldots$

och att $a_0 = \hat{f}_0$.

Vanligtvis föredras den komplexe formen (2) då denna ofte är enklare att räkne med.

Första frågan:

? Om $f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ik\omega x}$, hur hitter vi koefficienterna $\hat{f}_k$?

<u>Lemma:</u>

$$\frac{1}{T}\int_0^T e^{ik\omega x} \cdot e^{-in\omega x}\,dx = \begin{cases} 1 ; & k = n \\ 0 ; & k \neq n \end{cases}$$

En formell räkning med lemmat ger nu

$$f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}\hat{f}_k e^{ik\omega x} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-in\omega x}\,dx = \frac{1}{T}\int_0^T\Big(\sum_{-\infty}^{\infty}\hat{f}_k e^{ik\omega x}\Big)e^{-in\omega x}\,dx$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{f}_k\Big(\frac{1}{T}\int_0^T e^{ik\omega x}e^{-in\omega x}\,dx\Big) = \hat{f}_n.$$

(Jämför detta med fallet av en ON-bas $\{e_k\}_{k=1}^n$ i ett n-dimensionellt vektorrum V:

$$f=\sum_{k=1}^n a_k e_k \Rightarrow$$

$$\langle f, e_n\rangle = \langle\sum_{k=1}^n a_k e_k, e_n\rangle = \sum_{k=1}^n a_k\langle e_k,e_n\rangle = a_n \quad)$$

<u>Defn</u>: <u>Fourierkoefficienterna</u> $\hat{f}_n$ till en T-periodisk funktion $f(x)$ är

$$\hat{f}_n := \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-in\omega x}\,dx, \qquad n=\dots,-2,-1,0,1,2,\dots$$

Formlerna blir enklast då $\omega=1$, dvs $T=2\pi$. Av denna anledning ska vi huvudsakligen betrakta 2π-periodiska funktioner. En sådan kan alternativt ses som

(a) en funktion definierad på $(-\pi,\pi]$

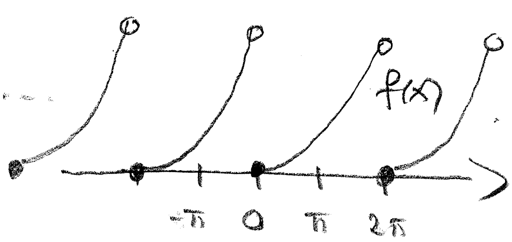
(b) en funktion definierad på $[0,2\pi)$

(c) en funktion $\tilde{f}(z)$ definierad på enhetscirkeln $\mathbb{T}:=\{z\in\mathbb{C}\,;\,|z|=1\}$ i komplexa planet, där $\tilde{f}(e^{ix})=f(x)$.

<u>Ex</u>: Låt $f(x):=x^2$, $x\in[0,2\pi)$

$g(x):=x^2$, $x\in(-\pi,\pi]$

och utvidga dessa till 2π-periodiska funktioner definierade på hela $\mathbb{R}$. Då blir g kontinuerlig, men ej f!



(1:4) Partialintegration

$$\Rightarrow \int x^2 e^{-ikx}\,dx = \left(\frac{i}{k}x^2 + \frac{2x}{k^2} - \frac{2i}{k^3}\right)e^{-ikx}, \quad k \neq 0$$

Detta ger Fourierkoefficienter

$$\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2 e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\Big[\cdots\Big]_{x=0}^{2\pi} = \frac{2\pi i}{k} + \frac{2}{k^2}$$

$$\hat{g}_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\Big[\cdots\Big]_{x=-\pi}^{\pi} = \frac{2}{k^2} \qquad k \neq 0$$

För $k=0$ gäller inte primitiven ovan, utan

$$\hat{f}_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2\,dx = \frac{4\pi^2}{3}$$

$$\hat{g}_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{\pi^2}{3}$$

Vi observerar:

- $\hat{f}_0$ är medelvärdet av f, medan $\hat{g}_0$ är medelvärdet av g (se i figuren: $\hat{g}_0 < \hat{f}_0$)
- $\hat{g}_k \to 0$ snabbare än $\hat{f}_k \to 0$ då $k \to \infty$ (ledande termer $\frac{2}{k^2}$ respektive $\frac{2\pi i}{k}$!)

  Detta beror på att f är diskontinuerlig, medan g är kontinuerlig.

  Allmänt: ju mer reguljär $f(x)$ är, desto snabbare avtar $\hat{f}_k$, då $k \to \infty$.

Vi ser också i exemplet att $\hat{f}_k$ i allmänhet är komplexa tal, även om $f(x)$ är reellvärd. Å andra sidan är koefficienterna i den reella Fourierserien alltid reella om $f(x)$ är reellvärd:

$$a_k = \hat{f}_k + \hat{f}_{-k} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left(e^{-ikt} + e^{ikt}\right)dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\,dt, \quad k = 1, 2, \ldots$$

$$b_k = i(\hat{f}_k - \hat{f}_{-k}) = \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left(e^{-ikt} - e^{ikt}\right)dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)\,dt, \quad k = 1, 2, \ldots$$

OBS: formeln ovan gäller inte för a_0:

$$a_0 = \hat{f}_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = \text{medelvärdet av } f(x).$$

Följande specialfall är viktiga: (1:5)

(1) Antag $f(x)$ är en **jämn funktion** $(f(-x)=f(x))$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos(nt)\,dt \\ b_n = 0 \end{cases}$$

∴ f:s Fourierserie är en cosinusserie:

$$f(t) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt)$$

(2) Antag $f(x)$ är en **udda funktion** $(f(-x)=-f(x))$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_n = 0 \\ b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin(nt)\,dt \end{cases}$$

∴ f:s Fourierserie är en sinusserie:

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt)$$

Givet $f(x)$ beräknas $\hat{f}_n$, a_n & b_n enligt ovan.

? Konvergerar $\sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{inx}$ mot $f(x)$?

Defn: **Delsumman** $S_N f(x)$ till f:s Fourierserie är

$$S_N f(x) := \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}_n e^{inx}$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{N}\left(a_n\cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$$

Frågan ovan är alltså:

? Konvergerar de trigonometriska polynomen $S_N f(x)$ mot $f(x)$?

Ex: (från ovan) Delsummorna är

$$S_N f(x) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{\substack{-N \\ n\neq 0}}^{N}\left(\frac{2\pi i}{n} + \frac{2}{n^2}\right)e^{inx}$$

$$= \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{N}\left(-\frac{4\pi}{n}\sin(nx) + \frac{4}{n^2}\cos(nx)\right)$$

$$S_N g(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{\substack{-N \\ n\neq 0}}^{N} \frac{2}{n^2} e^{inx}$$

$$= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{N}\frac{4}{n^2}\cos(nx)$$

OBS: g är en jämn funktion!

(1:6) **Övn:** Visa med <u>Weierstrass majorantsats</u> att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \cos(nx)$ är <u>likformigt konvergent</u> och att dess summa därför är en kontinuerlig funktion. (se kap. 2.5)

<u>Läsanvisning till fredag 10/11:</u>

- kap. 4.1, 4.6 : Fourierkoefficienternas grundläggande egenskaper.
- kap. 2.1, 2.4, 2.5 : repetera numeriska serier och funktionsserier.

? Vad betyder att funktionsserien

$\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ är punktvis konvergent ?

likformigt konvergent ?

? Under vilka förutsättningar är summan

$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ en kontinuerlig funktion ?

? När får man derivera termvis

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n'(x) \quad ?$$

? När får man integrera termvis

$$\int_a^b s(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b g_n(x)\,dx \right) \quad ?$$

Funktionsrummen $L_\infty(I)$ och $L_1(I)$

Låt $I=(a,b)\subset\mathbb{R}$ vara ett givet intervall och betrakta funktioner $f: I\longrightarrow\mathbb{C}$ definierade på I.

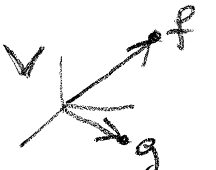
<u>Defn</u>: En mängd V bestående av funktioner på I, sägs vara ett <u>lineärt funktionsrum</u> om

(1) $f,g\in V \Rightarrow f+g\in V$

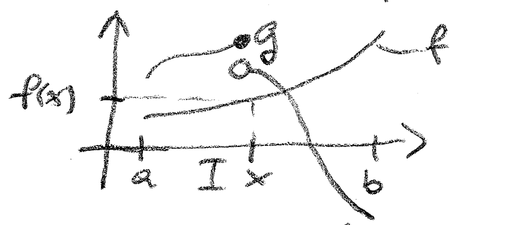
(2) $f\in V$ och $\alpha\in\mathbb{C} \Rightarrow \alpha f\in V$

V är alltså ett (komplext och möjligen oändligdimensionellt) vektorrum, där objekten är funktioner.

En funktion $f\in V$ kan alltså ses på två sätt:

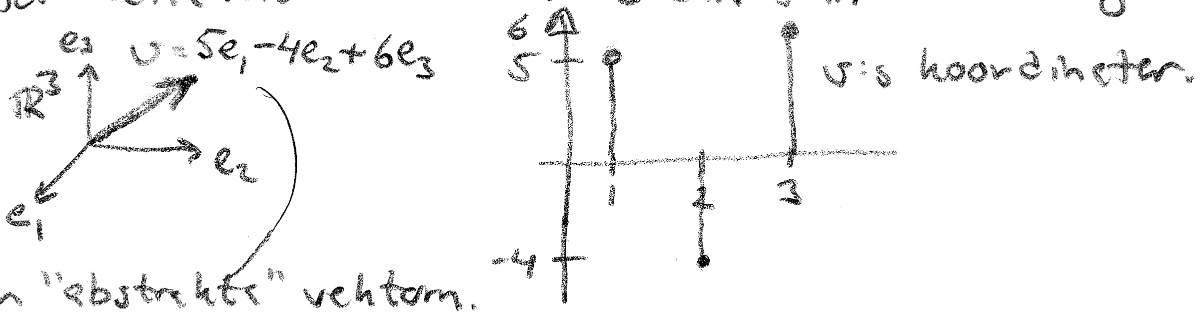


som en punkt/vektor i V



som en funktion definierad på I

Jämför detta med vektorer $v\in\mathbb{R}^3$ från lineär algebran:



den "abstrakta" vektorn.

Den viktigaste frågan här är:

? Hur mäter vi <u>avstånd</u> mellan punkter/funktioner i V?

<u>Defn</u>: En <u>norm</u> $\|\cdot\|$ på V är en funktion $f\longmapsto\|f\|$, där $\|f\|\geq 0$, sådan att

(1) $\|f+g\|\leq\|f\|+\|g\|$ (triangelolikheten)

(2) $\|\alpha f\| = |\alpha|\cdot\|f\|$ om $\alpha\in\mathbb{C}$

(3) $\|f\|=0$ om och endast om $f=\bar{0}$ = nollvektorn.

Vi diskuterar inte (3) här, utan återkommer till detta villkor på FÖ4.

(2:3) Med tillgång till en norm, kan vi mäta

- <u>avståndet</u> mellan f och g $:= \|f-g\|$
- <u>storleken</u> av f $:= \|f\| = \|f-\bar{0}\| =$ avståndet från f till $\bar{0}$.

Vi säger att en följd av funktioner $f_n \in V$ <u>konvergerar</u> mot $f \in V$ <u>i normen $\|\cdot\|$</u> om

$$\|f_n - f\| \to 0, \quad n \to \infty$$

<u>Ex:</u> Låt $I = (0,\infty)$. Betrakta funktionsrummen

$$L_\infty(0,\infty) := \{f:(0,\infty)\to\mathbb{C} \,;\, \sup_{x\in(0,\infty)} |f(x)| < \infty\}$$

= alla begränsade funktioner på $(0,\infty)$

$$L_1(0,\infty) := \{f:(0,\infty)\to\mathbb{C} \,;\, \int_0^\infty |f(x)|\,dx < \infty\}$$

= alla funktioner på $(0,\infty)$ med absolutkonvergent integral.

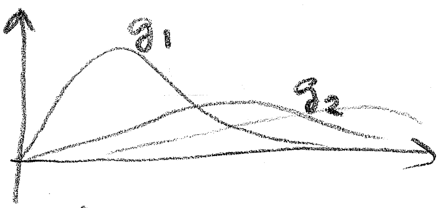
Den naturliga normen på $L_\infty(0,\infty)$ är <u>supremumnormen</u> $\|f\|_\infty := \sup_{x\in(0,\infty)} |f(x)|$

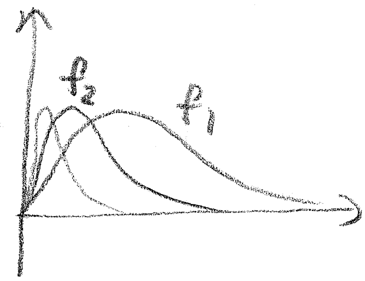
Den naturliga normen på $L_1(0,\infty)$ är <u>L_1-normen</u> $\|f\|_1 := \int_0^\infty |f(x)|\,dx$

Betrakta funktionsföljderna

$f_n(x) := nxe^{-nx}$

$g_n(x) := \frac{x}{n^2} e^{-x/n}$





Dessa tillhör både $L_\infty(0,\infty)$ och $L_1(0,\infty)$.

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x>0} |nxe^{-nx}| = \sup_{t>0} |te^{-t}| = \frac{1}{e}, \quad \forall n$$

$$\|f_n\|_1 = \int_0^\infty nxe^{-nx}\,dx = /\, nx = t \,/ = \int_0^\infty te^{-t}\frac{dt}{n} = \frac{1}{n}$$

På samma sätt $\|g_n\|_\infty = \frac{1}{n}$, $\|g_n\|_1 = 1$, $\forall n$

$\therefore$ $f_n \to \bar{0}$ i normen $\|\cdot\|_1$, men ej i normen $\|\cdot\|_\infty$

$g_n \to \bar{0}$ i normen $\|\cdot\|_\infty$, men ej i normen $\|\cdot\|_1$

<u>Slutsats:</u> Huruvida en funktionsföljd konvergerar eller ej beror på vilken norm man mäter konvergensen med!

<u>Konvention</u>: Om I är ett obegränsat intervall, låter vi $\|f\|_1 := \int_I |f(x)|\,dx$.

Om I är ett <u>begränsat</u> intervall, låter vi däremot $\|f\|_1 := \frac{1}{|I|}\int_I |f(x)|\,dx$, där $|I|$ = längden av I.

För alla I låter vi $\|f\|_\infty := \sup_{x\in I} |f(x)|$.

På detta sätt har alltid den konstanta funktionen $f(x)=c$ alltid normen $\|f\| = |c|$

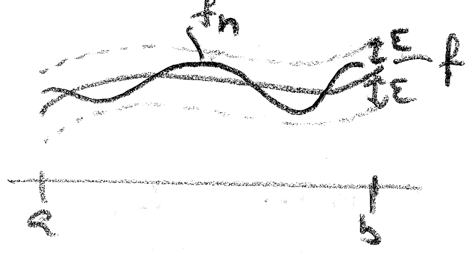
($f(x)=c$ tillhör ej $L_1(I)$ om I är obegränsad!)

<u>Sats</u>: Om I är <u>begränsat</u>, så är $L_\infty(I) \subset L_1(I)$ och $\|f\|_1 \le \|f\|_\infty$ för alla f.

<u>Bevis</u>: $\frac{1}{|I|}\int_I |f(x)|\,dx \le \frac{1}{|I|}\int_I \|f\|_\infty\,dx = \|f\|_\infty$ ■

<u>Kom ihåg</u>: Betrakta en funktionsföljd $f_n(x)$ på I. Vi säger att $f_n \to f$ <u>punktvis</u> på I om för varje $x \in I$ gäller att $f_n(x) \to f(x)$, dvs $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_x < \infty$ s.a. $|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$ om $n \ge N_x$.

I allmänhet beror detta N_x på x (förutom ε). Om ett N gäller för alla $x \in I$ sägs konvergensen vara <u>likformig</u>. Om $n \ge N$ innebär detta att <u>hela</u> f_n:s graf ligger i ett band av bredd 2ε runt f:s graf.



Ekvivalent är:

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$$

<u>Slutsats</u>: $f_n \to f$ i $L_\infty(I)$ (dvs i normen $\|\cdot\|_\infty$) om och endast om $f_n \to f$ likformigt på I.

<u>Övn</u>: Visa följande förbättring av sats 2.4.10: Antag I begränsat. Då gäller

(1) $f_n \to f$ likformigt $\Rightarrow$ $f_n \to f$ i normen $\|\cdot\|_1$

(2:4) (2) $f_n \to f$ i normen $\|\cdot\|_1$

$$\Rightarrow \int_I f_n \to \int_I f, \quad n \to \infty.$$

Faltning av funktioner:

Enligt triangelolikheten är $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

¿ Gäller liknande olikhet för produkt av funktioner?

Sats: För supremumnormen gäller att

$$\|f \cdot g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty$$

Bevis: $\forall x \in I$: $|f(x)g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)|$

$$\leq \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty$$

$$\Rightarrow \|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty \quad \blacksquare$$

Ex: Låt $f(x) := \frac{1}{|x|^{3/4}}$. Då är $f \in L_1(-1,1)$, ty

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{|x|^{3/4}} = 2\int_0^1 \frac{dx}{x^{3/4}} < \infty.$$

Däremot är $\|f \cdot f\|_1 = \int_{-1}^1 \frac{dx}{|x|^{3/2}} = \infty$, så $f^2 \notin L_1(-1,1)$.

Speciellt gäller ej $\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$ i allmänhet.

Defn: Låt f, g tillhöra funktionsrummet

$$L_1(\mathbb{T}) := \{2\pi\text{-periodiska } f \,;\, \int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx < \infty\}.$$

Faltningen $f * g$ av f och g är funktionen

$$(f*g)(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\,g(t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Detta är den naturliga produkten i funktionsrummet $L_1(\mathbb{T})$.

Ex: Låt $f \in L_1(\mathbb{T})$ och $g(x) := e^{ikx}$. Då är

$$(g*f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik(x-t)} f(t)\,dt$$

$$= e^{ikx}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,e^{-ikt}\,dt = \hat{f}_k \cdot e^{ikx}$$

$$= \hat{f}_k\, g(x)$$

Vi kommer att se att faltning är mycket användbart i teorin om Fourierserier.

Sats: Antag $f, g, h \in L_1(\mathbb{T})$. Då gäller att

(1) $f * g \in L_1(\mathbb{T})$ och $\boxed{\|f*g\|_1 \le \|f\|_1 \cdot \|g\|_1}$

(2) $f*g = g*f$ (* är kommutativ)

(3) $(f*g)*h = f*(g*h)$ (* är associativ)

(4) $\boxed{\widehat{f*g}_k = \hat{f}_k \cdot \hat{g}_k}$

Bevis:

(1)
$$\text{VL} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)\,dt \right| dx$$
$$\le \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|\cdot|g(t)|\,dt\,dx$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|\,dx\right)}_{/x-t=s/ \, = \int_{-\pi-t}^{\pi-t}|f(s)|\,ds \, = 2\pi\|f\|_1} |g(t)|\,dt$$
$$= \|f\|_1 \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g(t)|\,dt = \|f\|_1\cdot\|g\|_1 = \text{HL}.$$

(2)
$$(f*g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)\,dt = /x-t=s/$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+x}^{\pi+x} f(s)\,g(x-s)\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x-s)f(s)\,ds$$
$$= (g*f)(x).$$

(3) Lämnas som övning ....

(4)
$$\text{VL} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)\,dt\right)e^{-ikx}\,dx$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\,e^{-ik(x-t)}\,dx\right)}_{= /x-t=s/ \, = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-t}^{\pi-t} f(s)e^{-iks}\,ds \, = \hat{f}_k} g(t)\,e^{-ikt}\,dt$$
$$= \hat{f}_k \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,e^{-ikt}\,dt = \hat{f}_k\cdot\hat{g}_k = \text{HL}. \quad \blacksquare$$

2:6 Läsanvisning till tisdag 14/11:

- kapitel 2.3, 2.7 repetition
- kapitel 3.1: vad är ett linjärt rum?

Punktvis konvergens av Fourierserier

Låt $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ vara en integrabel 2π-periodisk funktion, dvs $f\in L_1(\mathbb{T})$. Vi beräknar dess Fourierkoefficienter $\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,e^{-ikt}\,dt$ och betraktar Fourierseriens delsummor $S_Nf(x) := \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}_k\, e^{ikx}$

Vi har

$$S_Nf(x) = \sum_{k=-N}^{N}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,e^{-ikt}\,dt\right)e^{ikx}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k=-N}^{N} e^{ik(x-t)}\right)f(t)\,dt$$

Defn: Dirichletkärnen är den 2π-periodiska funktionen $D_N(s) := \sum_{k=-N}^{N} e^{iks}$

Alltså: $\boxed{S_Nf(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_N(x-t)\,f(t)\,dt = (D_N * f)(x)}$

Vi har följande explicita uttryck för $D_N(s)$:

$$\boxed{D_N(s) = \sum_{-N}^{N} e^{iks}} = e^{-iNs}\sum_0^{2N}(e^{is})^k = e^{-iNs}\,\frac{e^{is(2N+1)}-1}{e^{is}-1}$$

$$= e^{-iNs}\,\frac{e^{is(N+\frac12)}}{e^{is/2}}\;\frac{\left(e^{is(N+\frac12)}-e^{-is(N+\frac12)}\right)/2i}{\left(e^{is/2}-e^{-is/2}\right)/2i}$$

$$\boxed{= \frac{\sin\left((N+\frac12)s\right)}{\sin\left(\frac{s}{2}\right)}}$$

Vi noterar även att

(1) $D_N(s)$ är en jämn funktion: $D_N(-s) = D_N(s)$

(2) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(s)\,ds = \sum_{-N}^{N}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{iks}\,ds = 1$

(3) $D_N(s)$ är ej en positiv funktion.

Fixera en punkt $a\in\mathbb{R}$. Vi huvudfråga här:

? Under vilka förutsättningar på $f(x)$ gäller att $S_Nf(a) \longrightarrow f(a)$?

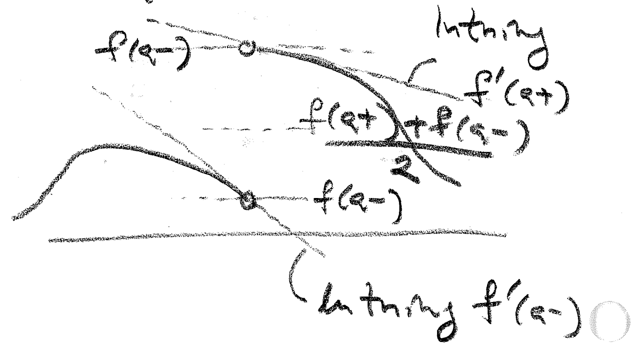
(3:2) Eftersom funktioner med språngdiskontinuitet i a är vanligt förekommande betraktar vi följande storheter:

- högergränsvärdet i $x=a$: $f(a+) := \lim_{x\to a^+} f(x)$
- vänstergränsvärdet i $x=a$: $f(a-) := \lim_{x\to a^-} f(x)$
- högerderivatan i $x=a$:

$$f'(a+) := \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a+)}{h}$$

- vänsterderivatan i $x=a$:

$$f'(a-) := \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a-)-f(a-h)}{h}$$

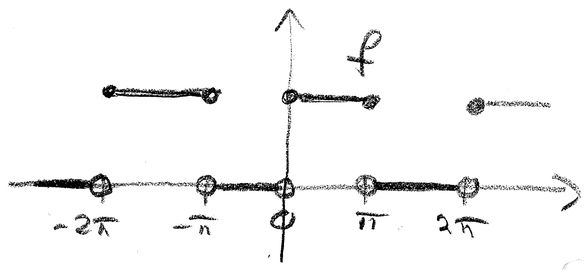


<u>Sats</u>: Låt $f \in L_1(\mathbb{T})$ och $a \in \mathbb{R}$. Antag att $f(a\pm)$ och $f'(a\pm)$ alla existerar i punkten a. Då gäller att $S_N f(a) \longrightarrow \frac{f(a+)+f(a-)}{2}$, $N\to\infty$.

Innan beviset:

<u>Ex</u>: Betrakta den 2π-periodiska funktionen

$$f(x) := \begin{cases} 1 & ; 0 \le x \le \pi \\ 0 & ; -\pi < x < 0 \end{cases}$$



$$\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi e^{-ikt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-ikt}}{-ik}\right]_0^\pi = \frac{1}{2\pi}\,\frac{(-1)^k-1}{-ik}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{i\pi k} & ; k \text{ udda} \\ 0 & ; k \text{ jämn} \end{cases}$$

$$\hat{f}_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi dt = \frac{1}{2}$$

Fourierserien blir:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{i\pi}\sum_{k \text{ udda}} \frac{1}{k} e^{ikx} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1}\,\frac{e^{i(2n+1)x} - e^{-i(2n+1)x}}{2i}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$$

med partialsumma

$$S_{2N+1}f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{N} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$$

(1) Betrakta $a=0$:

$f(0+)=1$, $f(0-)=0$, $f'(0\pm)=0$ existerar alla.

Vi verifierar:

$$S_{2N+1}f(0)=\frac{1}{2}\longrightarrow\frac{1}{2}=\frac{1+0}{2}$$ som i satsen.

(2) Betrakta $a=\frac{\pi}{2}$:

Vi ser att $f(\frac{\pi}{2}\pm)=1$, $f'(\frac{\pi}{2}\pm)=0$ alla existerar så enligt satsen:

$$S_{2N+1}f(\tfrac{\pi}{2})\longrightarrow\frac{f(\frac{\pi}{2}+)+f(\frac{\pi}{2}-)}{2}=f(\tfrac{\pi}{2})=1$$

f är kontinuerlig i $x=\frac{\pi}{2}$.

Men

$$S_{2N+1}f(\tfrac{\pi}{2})=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{2n+1},$$

så satsen säger att

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=1,$$ dvs

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$$ eller mer explicit

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\dots=\frac{\pi}{4}$$

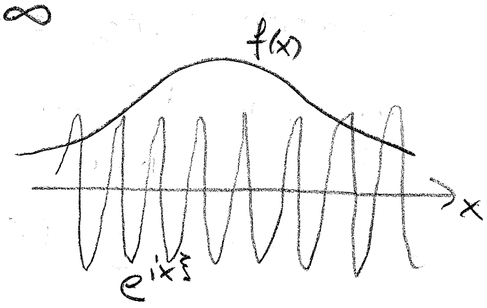
Satsen (under något mer allmänna förutsättningar, som i boken) kallas Dini's sats.

Beviset använder sig av följande:

<u>Riemann-Lebesgues lemma</u>! Låt $f\in L_1(\mathbb{R})$.

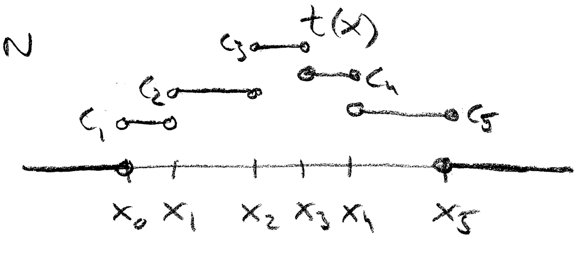
Då gäller att

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,e^{ix\xi}\,dx\longrightarrow 0,\quad \xi\to\infty$$



För att visa lemmat ska vi approximera f med en trappfunktion t, där

$$t(x)=\begin{cases}c_j, & x_{j-1}<x<x_j,\ j=1,\dots,N\\ 0, & x<x_0 \text{ eller } x>x_N\end{cases}$$



(3:4) <u>Faktum</u>: trappfunktionerna bildar en <u>tät</u> delmängd i $L_1(\mathbb{R})$, dvs givet $f \in L_1(\mathbb{R})$ och $\varepsilon > 0$ finns alltid en trappfunktion $t(x)$ s.a.
$\| t - f \|_1 \leq \varepsilon$.

<u>Bevis av R-L:s lemma</u>:

Låt f och $\varepsilon > 0$ vara givna. Tag en trappfunktion $t(x) = c_j$, $x_{j-1} < x < x_j$, $j = 1, \dots, N$ sådan att $\| f - t \|_1 \leq \frac{\varepsilon}{2}$

$$\Rightarrow \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix\xi} dx \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left((f(x) - t(x)) e^{ix\xi} + t(x) e^{ix\xi} \right) dx \right|$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - t(x)| dx + \left| \sum_{j=1}^{N} \int_{x_{j-1}}^{x_j} c_j e^{ix\xi} dx \right|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j=1}^{N} |c_j| \cdot \underbrace{\left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} e^{ix\xi} dx \right|}_{= \frac{e^{ix_j\xi} - e^{ix_{j-1}\xi}}{i\xi}}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j=1}^{N} |c_j| \frac{2}{\xi} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{|\xi|} \left(\sum_{j=1}^{N} 2|c_j| \right)$$

Låt nu $R := \frac{4}{\varepsilon} \sum_{j=1}^{N} |c_j|$

Om $|\xi| \geq R$ så är nu $\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix\xi} dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix\xi} dx \longrightarrow 0, \quad \xi \to \pm\infty$ ∎

Vi är nu redo för:

<u>Bevis av satsen</u>: Vi behöver visa att delsummorna

$$S_N f(a) = (D_N * f)(a) = (f * D_N)(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(a-t) D_N(t) dt \longrightarrow \frac{f(a+) + f(a-)}{2}, \quad N \to \infty$$

under förutsättningarna i satsen. Räkna:

$$S_N f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(a-t) D_N(t) dt + \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_{-\pi}^{0} f(a-t) D_N(t) dt}_{= /t = -s/ = \int_0^{\pi} f(a+s) \underbrace{D_N(-s)}_{= D_N(s)} ds}$$

(3:5)

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (f(a-t)-f(a-))D_N(t)\,dt$$
$$+ \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (f(a+t)-f(a+))D_N(t)\,dt}_{=:I} + (f(a+)+f(a-))\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi D_N(t)\,dt}_{=1/2}$$

$$I = \int_0^\pi (f(a+t)-f(a+))\frac{\sin((N+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})}\,dt$$

$$= \int_0^\pi \frac{f(a+t)-f(a+)}{t}\,\frac{t}{\sin(\frac{t}{2})}\,\frac{e^{i(N+\frac{1}{2})t}-e^{-i(N+\frac{1}{2})t}}{2i}\,dt$$

Låt nu

$$g(t) := \begin{cases} \frac{f(a+t)-f(a+)}{t}\,\frac{t}{\sin(\frac{t}{2})}\,\frac{1}{2i}, & t\in(0,\pi) \\ 0, & t\notin(0,\pi)\end{cases}$$

Vi ser att $\int_{-\infty}^{\infty}|g(t)|\,dt<\infty$ eftersom

- $t/\sin(\frac{t}{2})$ är begränsad på $(0,\pi)$
- $f\in L_1(\mathbb{R})$
- högerderivatan $f'(a+)=\lim_{t\to0^+}\frac{f(a+t)-f(a+)}{t}$ enligt existerar.

$$\Rightarrow I = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{it(N+\frac{1}{2})}\,dt - \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-it(N+\frac{1}{2})}$$

$$\to 0-0=0, \quad N\to\infty$$

enligt Riemann-Lebesgue.

På liknande sätt visas att

$$\int_0^\pi (f(a-t)-f(a-))D_N(t)\,dt \to 0, \quad N\to\infty$$

$$\therefore S_Nf(a) \to 0+0+(f(a+)+f(a-))\frac{1}{2}$$
$$= \frac{f(a+)+f(a-)}{2}, \quad N\to\infty \quad \blacksquare$$

(3:6) Övn: Visa att om $f \in L_1(\mathbb{R})$ är Riemannintegrerbar och $\varepsilon > 0$ så finns trappfunktioner $t_1(x)$ och $t_2(x)$ s.a. $t_1 \leq f \leq t_2$ och
$\|t_1 - f\|_1 \leq \varepsilon$ och $\|t_2 - f\|_1 \leq \varepsilon$

Läsanvisningar till måndag 20/11:

kapitel 4.2. : under vilka svagare förutsättningar än här gäller punktvis konvergens av Fourierserier?

Entydighet nästan överallt

<u>Defn</u>: En mängd $N \subset \mathbb{R}$ sägs vara en (Lebesgue-) <u>nollmängd</u> om det för varje $\varepsilon > 0$ finns en uppräknelig följd av öppna intervall $I_1, I_2, I_3, \ldots$ sådan att $N \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ och $\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \le \varepsilon$, där $|I_k|$ betecknar längden av I_k.

<u>Ex</u>: - Mängder bestående av ändligt många punkter.
- Uppräkneliga mängder som $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ = rationella talen.

<u>Faktum</u>: Låt $f \in L_1(\mathbb{R})$ och $g \in L_1(\mathbb{R})$. Då är

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - g(x)|\,dx = 0 \iff f(x) = g(x) \text{ nästan överallt}$$

dvs $N := \{x \,;\, f(x) \ne g(x)\}$ är en nollmängd.

Motsvarande gäller för 2π-periodiska funktioner $f, g \in L_1(\mathbb{T})$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|\,dx = 0 \iff f(x) = g(x) \text{ n.ö.}$$

<u>Konvention</u>: Om $f = g$ n.ö., betraktas f och g som <u>samma</u> element / funktion i $L_1(\mathbb{R})$ (el. $L_1(\mathbb{T})$).

T.ex. om $f = g$ n.ö. så är

$$|\hat{f}_k - \hat{g}_k| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - g(x))\, e^{-ikx}\,dx \right| \le \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|\,dx = 0, \text{ dvs } \hat{f}_k = \hat{g}_k.$$

? Gäller omvänt att $f \in L_1(\mathbb{T})$ bestäms entydigt av sina Fourierkoefficienter $\hat{f}_k$?

<u>Sats</u>: Låt $f, g \in L_1(\mathbb{T})$. Om $\hat{f}_k = \hat{g}_k$ för alla $k \in \mathbb{Z}$, så är $f(x) = g(x)$ n.ö.

Innan bevis av detta:

<u>Ex</u>: Lös $u'(x) - i u(x) = 0$

Fourierkoefficienterna för $u'(x)$ är

$$\widehat{u'}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u'(x) e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi} \Big(\underbrace{\big[u(x) e^{-ikx} \big]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - \int_{-\pi}^{\pi} u(x)(-ik) e^{-ikx}\,dx \Big)$$

(4:2) $= ik\,\hat{u}_k$, så det följer av differentialekv. att

$ik\,\hat{u}_k - i\,\hat{u}_k = 0$, dvs $(k-1)\,\hat{u}_k = 0$

$\Rightarrow \hat{u}_k = 0$ då $k \neq 1$

Låt nu $v(x) = e^{ix}$, så att $\hat{v}_k = \begin{cases} 1 & ; k = 1 \\ 0 & ; k \neq 1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ det finns en konstant c s.a.

$$\hat{u}_k = c\,\hat{v}_k = \widehat{c \cdot v}_k$$

Enligt satsen följer att $u(x) = c\,v(x) = c\,e^{ix}$ är den enda lösningen i $L_1(\mathbb{T})$ till $u'(x) - i\,u(x) = 0$.

Approximativa enheter:

? Finns det en funktion $\delta(x) \in L_1(\mathbb{T})$ s.a. $\delta * f = f$ för alla $f \in L_1(\mathbb{T})$, dvs δ är en enhet för faltningsprodukten ?

Om, så följer det att $\hat{\delta}_k \cdot \hat{f}_k = \hat{f}_k$ för alla $\hat{f}_k$ så $\hat{\delta}_k = 1$, $\forall k$, är nödvändigt.

Men Riemann-Lebesgues lemma visar speciellt att

Följdsats: Om $f \in L_1(\mathbb{T})$, så är

$$\lim_{n \to \pm\infty} \hat{f}_n = 0$$

Slutsats: Det finns ingen enhet för $*$.

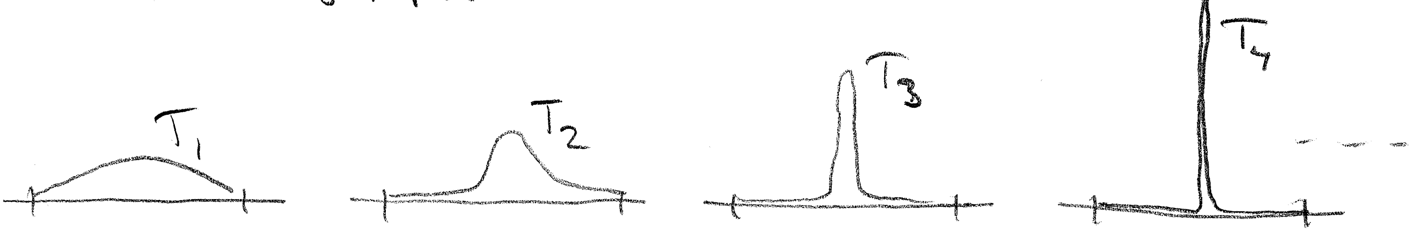
Det bästa vi kan göra:

Defn: En funktionsföljd $\{T_N\}_{N=1}^{\infty} \subset L_1(\mathbb{T})$ sägs vara en approximativ enhet om

(1) $\forall x, N$: $T_N(x) \geq 0$

(2) $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T_N(x)\,dx = 1$

(3) $\lim_{N \to \infty} \int_{\delta < |x| < \pi} T_N(x)\,dx = 0$ för varje fixt $\delta > 0$



Ex: För lämpligt val av konstanter c_N är

$$T_N(x) := c_N \left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^N, \quad N = 1,2,3,\ldots$$

är approximativ enhet. Enligt (2):

$$1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} c_N \left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)^N dx = /t = \frac{x}{2}/$$

$$= \frac{1}{2\pi} c_N \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos t)^{2N}\, 2\,dt = \frac{2}{\pi} c_N \int_0^{\pi/2} \cos^{2N} t\, dt$$

Övn: Visa att $I_N := \int_0^{\pi/2} \cos^{2N} t\, dt$ har värdet

$$I_N = \frac{\pi}{2}\frac{(2N-1)!!}{(2N)!!} = \frac{\pi}{2}\frac{(2N-1)(2N-3)\cdot(2N-5)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1}{(2N)(2N-2)(2N-4)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 2}$$

t.ex genom att härleda rekursionsformeln

$$I_N = \frac{2N-1}{2N} I_{N-1}$$ med omskrivningen

$$I_N = \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 t)\cos^{2N-2} t\, dt$$ och partiell integration.

Vi får: $c_N = \frac{(2N)!!}{(2N-1)!!}$ och $T_N(x) = \frac{(2N)!!}{(2N-1)!!}\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^N$

För att verifiera (3) noterar vi att maxvärdet av $\frac{1+\cos x}{2}$ på $[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]$ är $\frac{1+\cos\delta}{2}$

$$\Rightarrow T_N(x) \le 2N \underbrace{\frac{2N-2}{2N-1}}_{\le 1}\cdot\ldots\cdot\underbrace{\frac{4}{5}}_{\le 1}\cdot\underbrace{\frac{2}{3}}_{\le 1}\cdot\Big(\underbrace{\frac{1+\cos\delta}{2}}_{=:r<1}\Big)^N$$

$$\le 2N\cdot r^N \quad \text{för alla } x\in[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]$$

$$\therefore \int_{\delta<|x|<\pi} T_N(x)\,dx \le (2N\cdot r^N)\cdot(2(\pi-\delta))$$

$$\le 4\pi N\cdot r^N \to 0, \quad N\to\infty$$

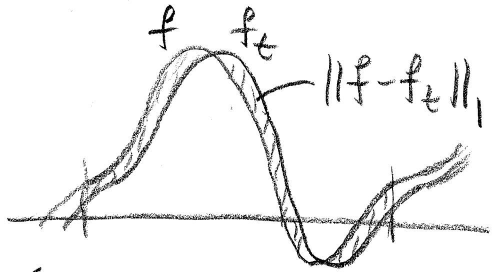
så (3) är uppfyllt.

Anledningen till att kalla T_N en approximativ enhet är:

Lemma: Låt $\{T_N\}_{N=1}^{\infty}$ vara en approx. enhet. Om $f\in L_1(\mathbb{T})$ så gäller att $T_N * f \to f$ i normen $\|\cdot\|_1$, dvs $\|T_N * f - f\|_1 \to 0$, $N\to\infty$.

(4:4) Beviset använder sig av följande

Faktum: Låt $f \in L_1(\mathbb{T})$ och låt $f_t(x) := f(x-t)$ vara den translaterade funktionen.



Då gäller alltid att $\|f_t - f\|_1 \to 0,\ t \to 0$

Bevis av lemmet:

Av (2) ser vi att $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) T_N(t)\,dt$ och därför är

$$(f * T_N)(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x))\, T_N(t)\,dt$$

och

$$\|f * T_N - f\|_1 = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x))\, T_N(t)\,dt \right| dx$$

$$\leq \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)|\, T_N(t)\,dt \right) dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f_t(x) - f(x)|\,dx \right) T_N(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \|f_t - f\|_1\, T_N(t)\,dt$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{|t|\leq\delta} \|f_t - f\|_1\, T_N(t)\,dt}_{=:\,I} + \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|t|<\pi} \|f_t - f\|_1\, T_N(t)\,dt}_{=:\,II}$$

Låt nu $\varepsilon > 0$ vara givet. Enligt faktum finns $\delta > 0$ s.a. $\|f_t - f\|_1 \leq \varepsilon$ för alla $|t| \leq \delta$.

$$\Rightarrow I \leq \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\leq\delta} \varepsilon\, T_N(t)\,dt \leq \varepsilon \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_N(t)\,dt = \varepsilon$$

För detta valda δ, finns enligt (3) ett $N_0 < \infty$ s.a. för alla $N \geq N_0$ är

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|t|<\pi} T_N(t)\,dt \leq \frac{\varepsilon}{\|f\|_1}$$

Eftersom $\|f_t - f\|_1 \leq \|f_t\|_1 + \|f\|_1 = 2\|f\|_1$ enligt triangelolikheten får vi för $N \geq N_0$ att

$\text{II} \leq 2\|f\| \int_{\delta<|t|<\pi} T_N(t)\,dt \leq 2\|f\| \cdot \frac{\varepsilon}{\|f\|} = 2\varepsilon$ (4:5)

∴ Vi har visat att

$\|f*T_N - f\|_1 \leq \varepsilon + 2\varepsilon = 3\varepsilon$ då $N \geq N_0$

dvs $f*T_N \to f$ i L_1-norm ∎

Vi är nu redo att visa entydighetssatsen:

__Bevis__: Antag att $f, g \in L_1(\mathbb{T})$ och $\forall k: \hat{f}_k = \hat{g}_k$.

Definiera $u := f - g$. Vi ser att

$\forall k: \hat{u}_k = \hat{f}_k - \hat{g}_k = 0$. Det räcker visa att

$\int_{-\pi}^{\pi} |u(x)|\,dx = 0$.

Betrakta faltningen $u*T_N$, där $T_N = c_N\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^N$

$T_N(x)$ är en approx. enhet och även ett trigonometriskt polynom:

$$T_N(x) = c_N\left(\cos\frac{x}{2}\right)^{2N} = c_N\left(\frac{e^{ix/2}+e^{-ix/2}}{2}\right)^{2N}$$

$$= c_N \frac{1}{2^{2N}} \sum_{k=0}^{2N} \binom{2N}{k} \left(e^{i\frac{x}{2}}\right)^k \left(e^{-i\frac{x}{2}}\right)^{2N-k}$$

$$= c_N \frac{1}{2^{2N}} \sum_{k=0}^{2N} \binom{2N}{k} e^{ix(N-k)} = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{inx}$$

där $a_n = c_N \frac{1}{2^{2N}} \binom{2N}{N-n}$

Med hjälp av exemplet från FÖ2 får vi

$$u*T_N = u*\left(\sum_{n=-N}^{N} a_n e^{inx}\right) = \sum_{n=-N}^{N} a_n (u*e^{inx})$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} a_n \underbrace{\hat{u}_n}_{=0} e^{inx} = 0$$

Så enligt lemmat gäller att

$\|u\|_1 = \|u - \underbrace{u*T_N}_{=0}\|_1 \to 0$ då $N \to \infty$, så

$\|u\|_1 = 0$ vilket skulle visas ∎

(4:6) Läsanvisningar till onsdag 22/11:

Defn 3.4.1 : Jämför med vår definition här av nollmängd.

Sats 4.3.1 : Om $u = f - g$ är kontinuerligt deriverbar, hur kan vi med satsen från FÖ 3 visa att $u(x) = 0, \forall x$, om $\hat{u}_k = 0, \forall k$?

Funktionsrummet $L_2(I)$:

Betrakta ett komplext linjärt funktionsrum V bestående av funktioner $f: I \longrightarrow \mathbb{C}$. Analogt med skalärprodukten

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad , \bar{x} = (x_1, \ldots, x_n), \ \bar{y} = (y_1, \ldots, y_n)$$

på $\mathbb{R}^n$ kan även V förses med en skalärprodukt.

? Hur generaliseras sambandet $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = \sum x_i^2 = |\bar{x}|^2$ till komplexa vektorrum ?

Ex: På det komplexa vektorrummet

$\mathbb{C}^n := \{ \bar{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n) ; \ z_k \in \mathbb{C} \}$ används skalärpred.

$$\langle \bar{z}, \bar{w} \rangle = \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{w_k}$$ så att (komplexkonjugat, ej vektorstreck)

$$\langle \bar{z}, \bar{z} \rangle = \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 = |\bar{z}|^2 = \text{längden av } \bar{z}.$$

För det oändligdimensionella funktionsrummet V, ersätter vi $\sum_k$ med $\int_I$:

$$\langle f, g \rangle = \int_I f(x) \overline{g(x)} \, dx \quad , \quad f, g : I \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Defn: Låt V vara ett komplext vektorrum. En skalärprodukt / inre produkt på V, är en funktion $f, g \longmapsto \langle f, g \rangle \in \mathbb{C}$ som är

(1) seskvilinjär ($1\tfrac{1}{2}$ linjär):

$$\langle f+g, h \rangle = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$$
$$\langle f, g+h \rangle = \langle f, g \rangle + \langle f, h \rangle$$
$$\langle \lambda f, g \rangle = \lambda \langle f, g \rangle$$
$$\langle f, \lambda g \rangle = \bar{\lambda} \langle f, g \rangle$$

om $f, g, h \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$

(2) hermitsk: $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$

(3) positivt definit: $\langle f, f \rangle \geq 0$ med likhet omm $f = \bar{0}$.

Den till $\langle \cdot, \cdot \rangle$ associerade normen är

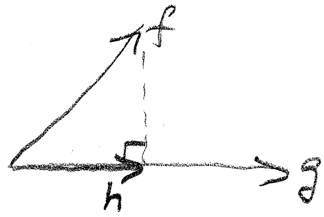
$$\| f \| := \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

Öm: Visa att $\langle \bar{z}, \bar{w} \rangle = \sum z_k \overline{w_k}$ och $\langle f, g \rangle = \int_I f \bar{g} \, dx$ ovan uppfyller (1)–(3), om vi som på FÖ4 säger att $f = g$ om $f(x) = g(x)$ nästan överallt.

5:2 **Lemma** (Cauchy-Schwarz olikhet)

Om $\|\cdot\|$ är den till $\langle\cdot,\cdot\rangle$ associerade normen gäller:

$$|\langle f,g\rangle| \leq \|f\|\cdot\|g\|, \quad f,g\in V$$



Bevis: Låt $h := \underbrace{\frac{\langle f,g\rangle}{\|g\|^2}}_{\in \mathbb{C}} g$

$$\Rightarrow\ 0 \leq_{/3/} \|f-h\|^2 = \langle f-h, f-h\rangle$$

$$=_{/1/} \langle f,f\rangle + \langle h,h\rangle - \langle f,h\rangle - \langle h,f\rangle$$

$$=_{/2/} \langle f,f\rangle + \langle h,h\rangle - 2\,\mathrm{Re}\langle h,f\rangle$$

$$=_{/1/} \|f\|^2 + \frac{|\langle f,g\rangle|^2}{\|g\|^4}\|g\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\Big(\overbrace{\frac{\langle f,g\rangle}{\|g\|^2}\langle g,f\rangle}^{|\langle f,g\rangle|^2}\Big)$$

$$= \|f\|^2 - \frac{|\langle f,g\rangle|^2}{\|g\|^2}, \text{ så } |\langle f,g\rangle| \leq \|f\|\cdot\|g\|. \ \blacksquare$$

Vi noterar att om $\langle\cdot,\cdot\rangle$ uppfyller (1)-(3) ovan, så uppfyller $\|\cdot\|$ axiomen (1)-(3) för en norm från FÖ2

t ex

$$\|f+g\|^2 = \langle f+g, f+g\rangle = \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle f,g\rangle$$

$$\underset{\text{Cauchy-Schwarz!}}{\leq} \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\|f\|\cdot\|g\| = (\|f\|+\|g\|)^2$$

$$\Rightarrow \|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

och

$$\|\alpha f\|^2 = \langle \alpha f, \alpha f\rangle = \alpha\bar{\alpha}\langle f,f\rangle = |\alpha|^2\|f\|^2$$

$$\Rightarrow \|\alpha f\| = |\alpha|\cdot\|f\|$$

Ex: Om $I \subset \mathbb{R}$ är ett intervall, låter vi

$$L_2(I) := \{f: I \to \mathbb{C}\ ;\ \int_I |f(x)|^2 dx < \infty\}$$

med skalärprodukt

$$\langle f,g\rangle := \int_I f(x)\overline{g(x)}\,dx \quad \text{och associerad norm}$$

$$\|f\| = \left(\int_I |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

Som för $L_1(I)$ normaliserar vi med $|I|$ = längden av I om I är begränsat:

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{|I|}\int_I f\bar{g}\,dx \quad \text{och} \quad \|f\| = \left(\frac{1}{|I|}\int_I |f|^2 dx\right)^{1/2}$$

Observera att om $I = \mathbb{T} \sim (0,2\pi)$ och $g(x) = e^{ikx}$ är

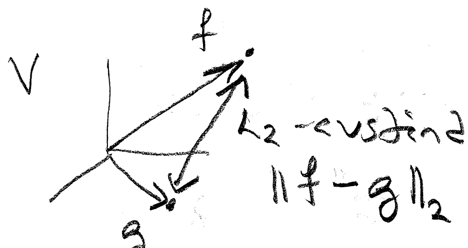
$$\langle f, e^{ikx} \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, \overline{e^{ikx}}\, dx = \hat{f}_k$$

$\therefore$ Fourierkoefficienterna $\hat{f}_k$ är skalärprodukten med e^{ikx},

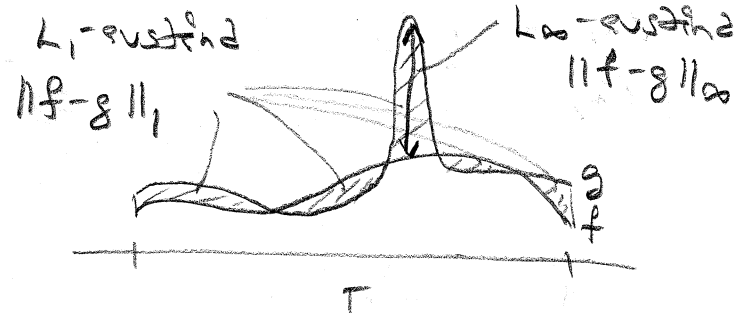
---

Jämförelse av $L_1(I)$, $L_2(I)$ och $L_\infty(I)$:

Kom ihåg de två synsätten på funktioner i ett funktionsrum V:



f, g som punkter/objekt i V



f, g som funktioner på I.

Lemma: Låt I vara ett begränsat intervall.

Då är $\|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$ och $L_\infty(I) \subset L_2(I) \subset L_1(I)$, eller explicit:

$$\boxed{\frac{1}{|I|}\int_I |f(x)|\, dx \leq \left(\frac{1}{|I|}\int_I |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \leq \sup_{x\in I} |f(x)|}$$

Bevis: Första $\leq$: Använd Cauchy-Schwarz olikhet:

$$\frac{1}{|I|}\int_I |f(x)|\, dx = \langle 1, |f(x)| \rangle \leq \underbrace{\left(\frac{1}{|I|}\int_I 1^2 dx\right)^{1/2}}_{=1}\left(\frac{1}{|I|}\int_I |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{1}{|I|}\int_I |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

Andra $\leq$: Låt $\|f\|_\infty = \sup_{x\in I}|f(x)|$ vara $|f|$:s största värde:

$$\left(\frac{1}{|I|}\int_I |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \leq \left(\frac{1}{|I|}\int_I \|f\|_\infty^2 dx\right)^{1/2} = \|f\|_\infty \left(\frac{1}{|I|}\int_I 1^2 dx\right)^{1/2}$$

$$= \|f\|_\infty \quad \blacksquare$$

Slutsats: Förutsatt att I är begränsat gäller:

Likf. konv. $\Rightarrow$ L_2-konv. $\Rightarrow$ L_1-konv.

Likf. konv. $\Downarrow$ punktvis konvergens

(5:4) Detta är fallet, ty

$$\|f_n - f\|_\infty \geq \|f_n - f\|_2 \geq \|f_n - f\|_1$$

$$\forall x \in I : \ |f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty$$

så t ex $\|f_n - f\|_\infty \to 0 \Rightarrow \|f_n - f\|_2 \to 0$, $n \to \infty$

<u>OBS</u>: Om I är obegränsat finns <u>inget</u> generellt samband mellan $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ eller konvergens i L_1, L_2, L_∞.

(Men att likformig konv. $\Rightarrow$ punktvis konv. är <u>alltid</u> sant)

<u>EX</u>: Betrakta

$$f(x) = \frac{1}{x^a} \quad \text{på} \quad I = (1, \infty), \quad \text{där } a \in \mathbb{R}.$$

Vi ser att

$$\|f\|_1 = \int_1^\infty \frac{dx}{x^a} = \begin{cases} \frac{1}{a-1}, & a > 1 \\ \infty, & a \leq 1 \end{cases}$$

$$\|f\|_2 = \left(\int_1^\infty \frac{dx}{x^{2a}} \right)^{1/2} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2a-1}}, & a > \frac{1}{2} \\ \infty, & a \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x > 1} x^{-a} = \begin{cases} 1, & a \geq 0 \\ \infty, & a < 0 \end{cases}$$

<u>Övn.</u>: Visa att $\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty \leq \|f\|_1$ då $1 < a < 2$,
att $\|f\|_2 \leq \|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$ då $2 < a < 2 + \sqrt{2}$
och att $\|f\|_\infty \leq \|f\|_2$ då $\frac{1}{2} < a < 1$ i exemplet ovan.

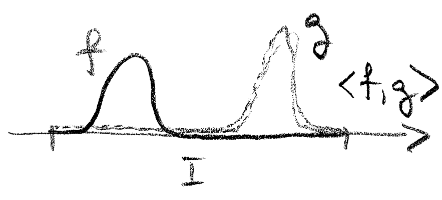
<u>Ortogonal projektion av funktioner</u>:

Låt V vara ett komplext linjärt rum med skalärprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ och associerad norm $\|\cdot\|$.

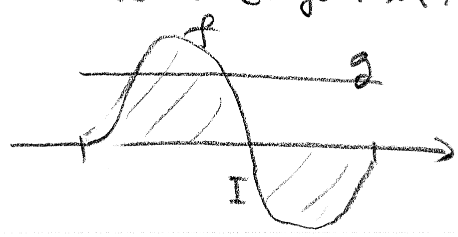
<u>Defn</u>: $f, g \in V$ sägs vara <u>ortogonala</u> om

$$\langle f, g \rangle = 0 \quad \left(\Leftrightarrow \langle g, f \rangle = \overline{\langle f, g \rangle} = 0 \right)$$

<u>Ex</u>: I $L_2(I)$ är följande funktioner ortogonala:



$\langle f, g \rangle = 0$

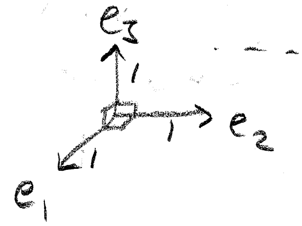


$\int_I f = 0 \Rightarrow \langle f, g \rangle = 0$

I det första exemplet är $\langle f, g \rangle = 0$ eftersom $\mathrm{supp}(f) := \{x ; f \neq 0\}$ och $\mathrm{supp}(g) := \{x ; g \neq 0\}$ är disjunkta mängder.
I andra exemplet är $\langle f, g \rangle = 0$ eftersom $\int_I f\,dx = 0$ och g är en konstant funktion.

<u>Defn</u>: En följd av vektorer $\{e_k\}_{k \in J}$ sägs vara en ON-mängd i V om

$$\langle e_k, e_n \rangle = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$



(J betecknar en indexmängd)

<u>Ex</u>: Enligt <u>Fö1</u> är

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ikx}\,\overline{e^{inx}}\,dx = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n. \end{cases}$$

Detta betyder att $\{e^{ikx}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ är en ON-mängd i $V = L_2(\mathbb{T})$

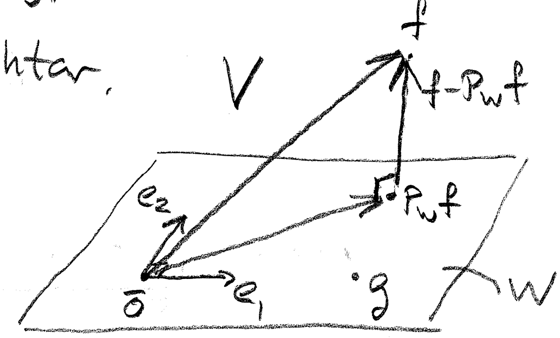
Fixera nu en ändlig ON-mängd $\{e_k\}_{k \in J}$ i V (dvs J antas vara ändlig) och låt W beteckna det ändligdimensionella underrummet i V som spänns upp av $\{e_k\}_{k \in J}$:

$$W := \left\{ \sum_{k \in J} \alpha_k e_k \; ; \; \alpha_k \in \mathbb{C} \right\}.$$

Låt $f \in V$ vara en godtycklig vektor.

? Vilken punkt $g \in W$ ligger närmast f, dvs för vilken $g \in W$ är

$\|f - g\|$ minimal ?



Antag först att $f \in W$ så att $f = \sum_{k \in J} \alpha_k e_k$.
Eftersom $\{e_k\}_{k \in J}$ är en ON-bas för W får vi att

$$\langle f, e_n \rangle = \left\langle \sum_{k \in J} \alpha_k e_k, e_n \right\rangle = \sum_{k \in J} \alpha_k \langle e_k, e_n \rangle = \alpha_n$$

Om däremot $f \notin W$ ger punkten

$P_W f := \sum_{k \in J} \langle f, e_k \rangle e_k \in W$ den närmaste punkten till f i W:

(5:6) <u>Sats</u>: Låt V, $\{e_k\}_{k\in J}$, W, f och $P_W f$ vara som ovan.

Då gäller:

(1) $\forall g \in W$: $\|f-g\| \geq \|f-P_W f\|$ med likhet omm $g = P_W f$.

(2) Detta minsta avstånd är

$$\|f-P_W f\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle f, e_k\rangle|^2$$

<u>Bevis</u>: Vi visar först att $f - P_W f$ är ortogonal mot W, dvs ort. mot varje $h = \sum_{k\in J} \alpha_k e_k \in W$:

Skriv $\hat{f}_k := \langle f, e_k\rangle$:

$$\langle f - P_W f, h\rangle = \langle f - \sum_{k\in J} \hat{f}_k e_k, \sum_{j\in J} \alpha_j e_j\rangle$$

$$= \sum_{j\in J} \overline{\alpha_j}\langle f, e_j\rangle - \sum_{k\in J}\sum_{j\in J} \hat{f}_k \overline{\alpha_j}\langle e_k, e_j\rangle$$

$$= \sum_{j\in J} \overline{\alpha_j}\hat{f}_j - \sum_{j\in J} \hat{f}_j \overline{\alpha_j} = 0$$

Vi kan nu använda Pytagoras sats (anm. A8):

$$\|f-g\|^2 = \|(f-P_W f) + (P_W f - g)\|^2 = /h = P_W f - g \in W/ =$$

$$= \|f - P_W f\|^2 + \|P_W f - g\|^2 \geq \|f - P_W f\|^2$$ med likhet omm $g = P_W f$.

För att visa (2), välj $g = \overline{0}$:

$$\|f\|^2 = \|f - P_W f\|^2 + \|\sum_{k\in J} \hat{f}_k e_k\|^2$$

$$= \|f - P_W f\|^2 + \sum_{k\in J} \underbrace{\|\hat{f}_k e_k\|^2}_{= |\hat{f}_k| \cdot \|e_k\| = |\hat{f}_k|}$$

<u>Läsanvisningar till fredag 24/11</u>:

s. 25–28. Repetera Gram-Schmidt ortogonalisering (s. 28 överst) från linjär algebra.

Parsevals formel:

Låt $f \in L_2(\mathbb{T})$, dvs f är 2π-periodisk och $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$.

? Gäller det att $S_N f = \sum_{-N}^{N} \hat{f}_k e^{ikx}$ konvergerar mot f i L_2-norm, dvs gäller $\int_{-\pi}^{\pi} |S_N f(x) - f(x)|^2 dx \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$, ?

Vi ska här visa att svaret är ja!

Det är instruktivt att abstrahera lite:

- Betrakta en ON-mängd $\{e_k\}_{k\in J}$ $(= \{e^{ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}})$ i ett funktionsrum V $(= L_2(\mathbb{T}))$ med skalärprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
- Fixera en uttömmande svit för indexmängden J:
  $$J_1 \subset J_2 \subset J_3 \subset J_4 \subset \ldots \subset J,$$
  dvs alla J_N är ändliga mängder och $J = \bigcup_{N=1}^{\infty} J_N$.
  (För Fourierserier är $J_N = \{-N, -N+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, N-1, N\}$)
- Den ändliga ON-mängden $\{e_k\}_{k\in J_N}$ spänner upp ett underrum W_N. Enligt FÖ5 är den ortogonala projektionen av $f \in V$ på W_N =
  $$P_N f := \sum_{k\in J_N} \langle f, e_k \rangle e_k.$$
  (För Fourierserier är $P_N f = \sum_{-N}^{N} \hat{f}_k e^{ikx} = S_N f$ = delsumman)

Enligt FÖ5 är avståndet mellan $P_N f$ och f:

$$\boxed{\|f - P_N f\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k\in J_N} |\hat{f}_k|^2}, \quad \text{där } \hat{f}_k := \langle f, e_k \rangle.$$

Vi observerar att:

- Det gäller alltid att
  $$\sum_{k\in J} |\hat{f}_k|^2 \leq \|f\|^2 \quad \text{(Bessels olikhet)}$$
  eftersom VL ≥ 0. Kom ihåg att $\sum_{k\in J} |\hat{f}_k|^2 = \lim_{N\to\infty} \sum_{k\in J_N} |\hat{f}_k|^2$
- Det råder likhet i Bessels olikhet, dvs
  $$\sum_{k\in J} |\hat{f}_k|^2 = \|f\|^2,$$
  omm $\lim_{N\to\infty} \|f - P_N f\| = 0$

(6:2) Om $\sum_{k\in J} |\hat{f}_k|^2 = \|f\|^2$ för alla $f \in V$, så är $\hat{f}_k = 0, \forall k$ bara då $f = \bar{0}$.

<u>Defn</u>: En ON-mängd $\{e_k\}_{k\in J}$ sägs vara <u>fullständig</u> i V om det gäller att

$\forall k : \langle f, e_k \rangle = 0 \Rightarrow f = \bar{0}$

(dvs om f är ortogonal mot alla e_k så måste $f = \bar{0}$)

<u>Anmärkning</u>: Begreppet "fullständig" för funktionsrum motsvarar begreppet "bas" för ändligdimensionella vektorrum.

För Fourierserier i $L_2(\mathbb{T})$ gäller:

<u>Sats</u>: (1) ON-mängden $\{e^{ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ är fullständig i $L_2(\mathbb{T})$.

(2) För varje $f \in L_2(\mathbb{T})$ gäller <u>Parsevals formel</u>:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}_k|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

(3) För varje $f \in L_2(\mathbb{T})$ konvergerar dess Fourierserie mot f i L_2-norm:

$$\|S_N f - f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\sum_{-N}^{N} \hat{f}_k e^{ikx} - f(x)\right|^2 dx\right)^{1/2} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

Vi har redan sett att

(1) $\Leftarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3).

För att visa (1): Observera att om $f \in L_2(\mathbb{T})$ så gäller speciellt att $f \in L_1(\mathbb{T})$ eftersom $L_2(\mathbb{T}) \subset L_1(\mathbb{T})$ enligt FÖ5. Vi behöver visa:

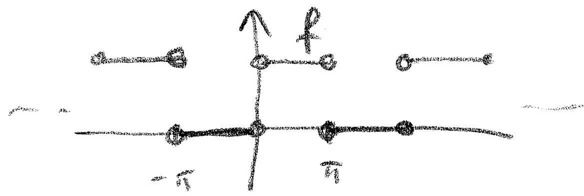
$\forall k : \hat{f}_k = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ n.ö.

Detta visades på FÖ4!

Det återstår att visa (3), vilket vi väntar lite med.

<u>Ex</u>: Vi såg på FÖ3 att

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; \ 0 < x < \pi \\ 0 & ; \ -\pi < x < 0 \end{cases}$$



har Fourierkoefficienter

$$\hat{f}_k = \begin{cases} 1/i\pi k & ; \quad k \text{ udda} \\ 1/2 & ; \quad k = 0 \\ 0 & ; \quad k \text{ jämn} \neq 0. \end{cases}$$

Eftersom $\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi 1^2 dx\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} < \infty$ så gäller $f \in L_2(\mathbb{T})$.

Parsevals formel $\Rightarrow$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \sum_{\text{udda } k} \left|\frac{1}{i\pi k}\right|^2 = \|f\|^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{\text{udda } k} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Från detta kan vi även bestämma $S := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ enligt följande:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}_{S}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} S = \frac{\pi^2}{8}, \text{ dvs } S = \frac{\pi^2}{6}$$

Slutsats:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{24}$$

Vi ger nu två olika bevis av (3).

Bevis 1: ○ Vi ska visa $\|S_N f - f\|_2 \to 0$.

Det räcker visa att det finns $g \in L_2(\mathbb{T})$ s.a. $\|S_N f - g\|_2 \to 0$, för i så fall följer att

$$\underbrace{\langle S_N f - g, e_n\rangle}_{} = \sum_{-N}^{N} \hat{f}_k \langle e_k, e_n\rangle - \hat{g}_n \overset{\text{om } N \geq n}{=} \hat{f}_n - \hat{g}_n$$

$\leq$ /Cauchy-Schwarz/

$\leq \|S_N f - g\| \cdot \underbrace{\|e_n\|}_{=1} \to 0, \ N \to \infty.$

Så $\forall n : \hat{f}_n = \hat{g}_n$, och enligt (1) måste $f(x) = g(x)$ n.ö.

○ För att visa att $S_N f$ konvergerar mot något $g \in L_2(\mathbb{T})$ i normen $\|\cdot\|_2$, betraktar vi först avståndet mellan två delsummor med $M \geq N$:

$$\|S_M f - S_N f\|_2^2 = \left\|\sum_{N < |k| \leq M} \hat{f}_k e_k\right\|^2 =$$

(6:4) $= \sum_{N<|k|\le m} |\hat{f}_k|^2 \le \sum_{|k|>N} |\hat{f}_k|^2$ enligt Pytagoras

Vidare är $\sum_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}_k|^2 \le \|f\|^2 < \infty$ enligt Bessels olikhet, så speciellt gäller att $\sum_{|k|>N} |\hat{f}|^2 \to 0$, $N \to \infty$.

Defn: Låt $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ vara en följd av vektorer i ett linjärt rum V med norm $\|\cdot\|$. Vi säger att $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ är en Cauchyföljd i V om

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n < \infty \; \forall m \ge n : \|g_m - g_n\| \le \varepsilon.$$

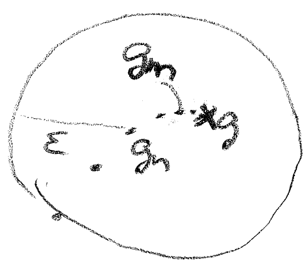
Kom ihåg: $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergerar i V om det finns $g \in V$ s.a.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n < \infty \; \forall m \ge n : \|g_m - g\| \le \varepsilon.$$

OBS: • Definitionen av Cauchyföljd använder sig inte av gränselementet g.

• Om $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergerar (mot något $g \in V$), så är $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ en Cauchyföljd.

Däremot är omvändningen inte alltid sann!



Defn: Om varje Cauchyföljd i V konvergerar kallas rummet V ett Banachrum. Om V har en skalärprodukt kallas det ett Hilbertrum.

Faktum: $L_1(I) := \{f : I \to \mathbb{C} \,;\, f$ är Lebesgueintegrerbar och $\int_I |f(x)|\,dx < \infty\}$ är ett Banachrum.

$L_2(I) := \{f : I \to \mathbb{C} \,;\, f$ är Lebesgueintegrerbar och $\int_I |f(x)|^2\,dx < \infty\}$ är ett Hilbertrum.

Detta faktum slutför bevis 1, eftersom vi visade att $\{S_N f\}_{N=1}^{\infty}$ är en Cauchyföljd. Eftersom $L_2(\mathbb{T})$ är ett Hilbertrum följer det att det finns $g \in L_2(\mathbb{T})$ s.a.

$$\|S_N f - g\|_2 \to 0, \; N \to \infty. \; \blacksquare$$

Vi ger nu ett alternativt bevis av (3) som inte använder begreppet Hilbertrum. Dock behöver vi även detta begrepp på Fö12.

Vi behöver följande variant av det som visades på Fö4:

<u>Lemma</u>: Låt $\{T_N\}_{N=1}^{\infty}$ vara den approximativa enheten $T_N(x) := \left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^N$ och låt $f\in L_2(\mathbb{T})$.
Då gäller att $\|T_N * f - f\|_2 \to 0$, $N\to\infty$.

<u>Bevis</u>: Som på Fö4 skriver vi

$$f*T_N(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x-t)-f(x))\,T_N(t)\,dt$$

Det räcker att visa att

$$\boxed{\|f*T_N - f\|_2 \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\|f_t-f\|_2\, T_N(t)\,dt} \qquad (*)$$

för resten är helt analogt med tidigare, och använder sig av det faktum att

$\|f_t - f\|_2 \to 0$, $t\to 0$ (där $f_t(x)=f(x-t)$ är den translaterade fknen)

För att visa (*), kom ihåg triangelolikheten för $\|\cdot\|_2$:

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k g_k\Big\|_2 \le \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|\cdot\|g_k\| \quad \text{om } \alpha_k\in\mathbb{C},\ g_k\in L_2(\mathbb{T})$$

En kontinuerlig variant av detta är:

$$\Big\|\int_a^b \alpha(t)\, g_t\,dt\Big\|_2 \le \int_a^b |\alpha(t)|\cdot\|g_t\|\,dt, \quad \alpha(t)\in\mathbb{C},\ g_t\in L_2(\mathbb{T}) \text{ för } t\in(a,b)$$

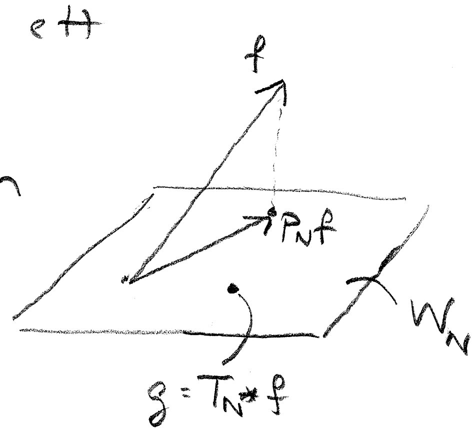
Låter vi $\alpha(t)=T_N(t)\ge 0$ och $g_t(x) = f_t(x)-f(x)$ här får vi (*). ∎

<u>Bevis nr. 2 av (3)</u>: Vi behöver visa att

$\|S_N f - f\|_2 \to 0$, $N\to\infty$.

Vi ser här $S_N f(x)$ som projektionen $P_N f$ i underrummet

$W_N := \{\sum_{-N}^{N} \alpha_k e^{ikx};\ \alpha_k\in\mathbb{C}\}$



Kom ihåg från Fö4 att

$$(T_N*f)(x) = \sum_{-N}^{N} \underbrace{\hat f_k\, \frac{c_N}{2^{2N}}\binom{2N}{N-k}}_{\alpha_k}\, e^{ikx}, \quad \text{dvs } T_N*f\in W_N$$

(6:6) Enligt FÖS är $P_N f$ den punkt i W_N som ligger närmast f, så

$$\| S_N f - f \|_2 = \| P_N f - f \|_2 \leq \| T_N * f - f \|_2$$

Enligt lemmat går HL mot 0, och därmed går även VL mot 0, vilket skulle visas. ■

<u>Läsanvisningar till måndag 27/11</u>:

- s. 44, Följdsats 4.3.2:
  Visa formeln i övning 4.3.3 genom polarisering av Parsevals formel. (se även uppg. 302)
- Bessels olikhet och Parsevals likhet: s. 28-29.

Likformig konvergens av Fourierserier:

? Vilka egenskaper hos en 2π-periodisk funktion f är nödvändiga och tillräckliga för att Fourierserien $\sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikx}$ ska konvergera likformigt mot f ?

Kom ihåg: Om $g_n \to g$ likformigt på E, dvs
$$\|g_n - g\|_\infty = \sup_{x\in E} |g_n(x) - g(x)| \to 0, \quad n\to\infty$$
och om alla g_n är kontinuerliga funktioner, då är även g en kontinuerlig funktion.

Slutsats: För att $S_N f$ ska kunna konvergera likf. mot f, måste nödvändigtvis f vara kontinuerlig, ty partialsummorna $S_N f$ är alla kont. fkner.

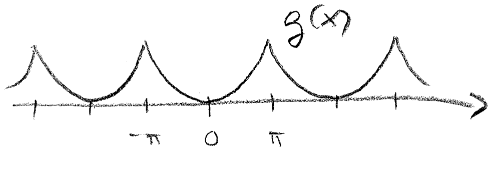
Å andra sidan, ett tillräckligt villkor är följande:

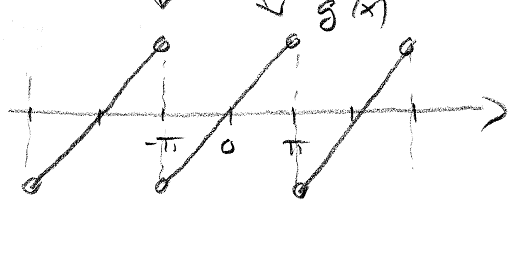
Sats: Antag att f är 2π-periodisk, kontinuerlig och styckvis C^1, dvs det finns ändligt många punkter $-\pi = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N = \pi$ s.a. $f'(x)$ existerar som en kontinuerlig funktion på $[x_{k-1}, x_k]$ och $f(x_k-) = f(x_k+)$ för alla k.
Då konvergerar dess Fourierserie likf. mot f:
$$\left\| \sum_{-N}^{N} \hat{f}_k e^{ikx} - f(x) \right\|_\infty \to 0, \quad N\to\infty.$$

Vi väntar med bevis och studerar först funktioner f med egenskaper som i satsen. Dess derivata $f'(x)$ existerar enligt förutsättningarna i alla punkter utom möjligen i $x_0, x_1, \ldots, x_N$ samt punkter på avstånd $k\cdot 2\pi$ från dessa.

Ex: Funktionen $g(x) = x^2$, $|x|<\pi$ från Fö1 har derivata $g'(x) = 2x$, $|x|<\pi$ och Fourierserie
$$g \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2}\cos(kx)$$

derivatan existerar ej i dessa punkter.





(7:2) Enligt satsen är $g(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2}\cos(kx)$ med likformig konvergens.
Vi kontrollerar med Weierstrass majorantsats:
$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\| \frac{4}{k^2}\cos(kx) \right\|_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} < \infty$$ så serien konv. likformigt.

För beviset av satsen behöver vi följande

Lemma: Antag att f är som i satsen.
Då är $\widehat{f'}_n = in\hat{f}_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

Bevis: $$\widehat{f'}_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(x)e^{-inx}\,dx$$
$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N}\left(\left[f(x)e^{-inx}\right]_{x_{k-1}}^{x_k} - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)(-in)e^{-inx}\,dx \right)$$
$$= \underbrace{\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N}\left(f(x_k)e^{-inx_k} - f(x_{k-1})e^{-inx_{k-1}}\right)}_{=0 \text{ pga teleskopsumma.}} + in\hat{f}_n = in\hat{f}_n \qquad \blacksquare$$

OBS: Partiell integration kan bara göras på intervall där integranden är kontinuerligt deriverbar.

Bevis av satsen:
Vi visar först att $\sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikx}$ konvergerar likformigt mot någon funktion g. Enligt Weierstrass majorantsats räcker det att visa att
$$\sum_{-\infty}^{\infty} \|\hat{f}_k e^{ikx}\|_\infty = \sum_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}_k|$$ är konvergent.

För att visa detta skriver vi
$$|\hat{f}_k| = \frac{1}{|k|}\cdot|ik\hat{f}_k| = \frac{1}{|k|}\cdot|\widehat{f'}_k| \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{|k|^2} + |\widehat{f'}_k|^2\right)$$ för $k \neq 0$

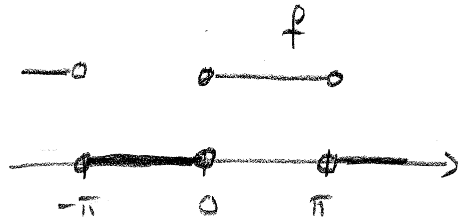
Detta är sant eftersom
$$ab \le \frac{1}{2}(a^2+b^2) \iff 0 \le (a-b)^2$$
Vi får:
$$\sum_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}_k| \le |\hat{f}_0| + \frac{1}{2}\sum_{k\neq 0}\left(\frac{1}{|k|^2} + |\widehat{f'}_k|^2\right)$$
$$\le |\hat{f}_0| + \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f'(x)|^2\,dx < \infty$$
eftersom f' enligt förutsättningarna är en begränsad funktion.

Det återstår att visa att $g(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{inx}$ är lika med $f(x)$ för alla $x \in \mathbb{R}$.
Eftersom f och g är kontinuerliga funktioner, räcker det att visa att $\|f-g\|_2 = 0$. Vi har

$$\|f-g\|_2 = \|(f-S_Nf)+(S_Nf-g)\|_2$$
$$\le \underbrace{\|f-S_Nf\|_2}_{\to 0 \text{ enligt FÖ 6.}} + \underbrace{\|S_Nf-g\|_2}_{\le \|S_Nf-g\|_\infty \to 0 \quad \uparrow \text{FÖ5}}$$

Detta visar satsen. ∎

Gibbs fenomen:



Vi ska här studera mer i detalj Fourierserien till

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; \ 0 < x < \pi \\ 0 & ; \ -\pi < x < 0. \end{cases}$$

På FÖ3 visades ~~att~~ Fourierseriens udda partialsummor är

$$S_{2N-1}f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N} \frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}.$$

Eftersom Fourierserien inte innehåller några jämna termer är $S_{2N}f(x) = S_{2N-1}f(x)$, $N = 1, 2, 3, \ldots$

Det räcker vidare att studera $S_{2N-1}f(x)$ för $0 < x < \pi$ eftersom $S_{2N-1}f(-x) = 1 - S_{2N-1}f(x)$.

Vi funktionsundersöker $S_{2N-1}f(x)$ på $(0,\pi)$

$$(S_{2N-1}f)'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots + \frac{\sin((2N-1)x)}{2N-1}\right)\right)$$
$$= \frac{2}{\pi}\left(\cos x + \cos 3x + \ldots + \cos((2N-1)x)\right)$$
$$= \frac{2}{\pi}\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{i(2k+1)x}\right) = \frac{2}{\pi}\mathrm{Re}\left\{\sum_{k=0}^{N-1}(e^{i2x})^k \cdot e^{ix}\right\}$$
$$= \frac{2}{\pi}\mathrm{Re}\left\{\frac{(e^{i2x})^N - 1}{e^{i2x}-1}\cdot e^{ix}\right\} = \frac{2}{\pi}\mathrm{Re}\left\{\frac{(e^{iNx}-e^{-iNx})/2i}{(e^{ix}-e^{-ix})/2i}\,\frac{e^{iNx}}{\cancel{e^{ix}}}\cdot\cancel{e^{ix}}\right\}$$
$$= \frac{2}{\pi}\,\frac{\sin(Nx)}{\sin x}\cos(Nx) = \frac{\sin(2Nx)}{\pi\sin(x)} = 0 \iff 2Nx = k\cdot\pi$$

Detta ger stationära punkter i intervallet $(0,\pi)$:

$$x_k = k\cdot\frac{\pi}{2N}, \quad k = 1, 2, \ldots, 2N-1.$$

(7:4) Dette ger tabellen

x	0		x_1		x_2		x_3		...	x_{2N-1}
$(S_{2N-1}f)'$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	...	
$S_{2N-1}f$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	y_1	$\searrow$	y_2	$\nearrow$	y_3	$\searrow$	...	

$$y_k = S_{2N-1}f(x_k) = \frac{1}{2} + \int_0^{x_k} (S_{2N-1}f)'(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2} + \int_0^{k\pi/2N} \frac{1}{\pi} \frac{\sin(2Nx)}{\sin x}\,dx = /\,2Nx = t\,/$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{k\pi} \frac{\sin(t)}{t} \frac{t/2N}{\sin(t/2N)}\,dt$$

Men ser att integranden, för fixt k, konvergerar likformigt mot $\frac{\sin t}{t}\cdot 1$, då $N \to \infty$.

$$\Rightarrow y_k \longrightarrow \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{k\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt}_{=:\,w_k}, \quad N \to \infty$$

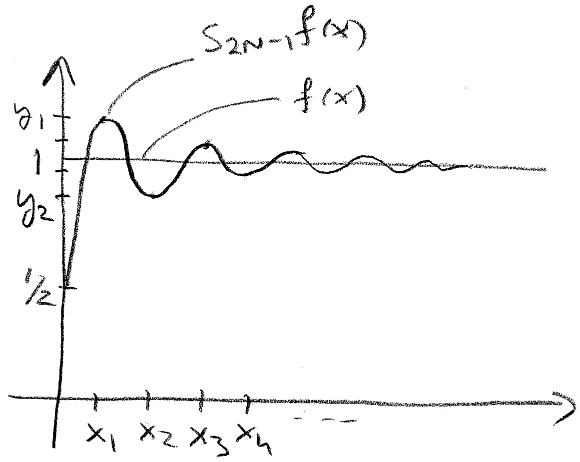
En numerisk beräkning av w_k ger:

$w_1 \approx 1.0895$

$w_2 \approx 0.9514$

$w_3 \approx 1.0331$

$w_4 \approx 0.9750$



Slutsats:

Delsumman $(S_{2N-1}f)(x)$ har ett lokalt maximum i $x_1 = \frac{\pi}{2N}$ och detta är $y_1 \approx w_1 \approx 1.0895$

Då $N \to \infty$, följer att $x_1 \to 0$, men y-värdet $y_1 = S_{2N-1}f(x_1) \not\to 1$ utan konvergerar mot $w_1 \approx 1.0895$.

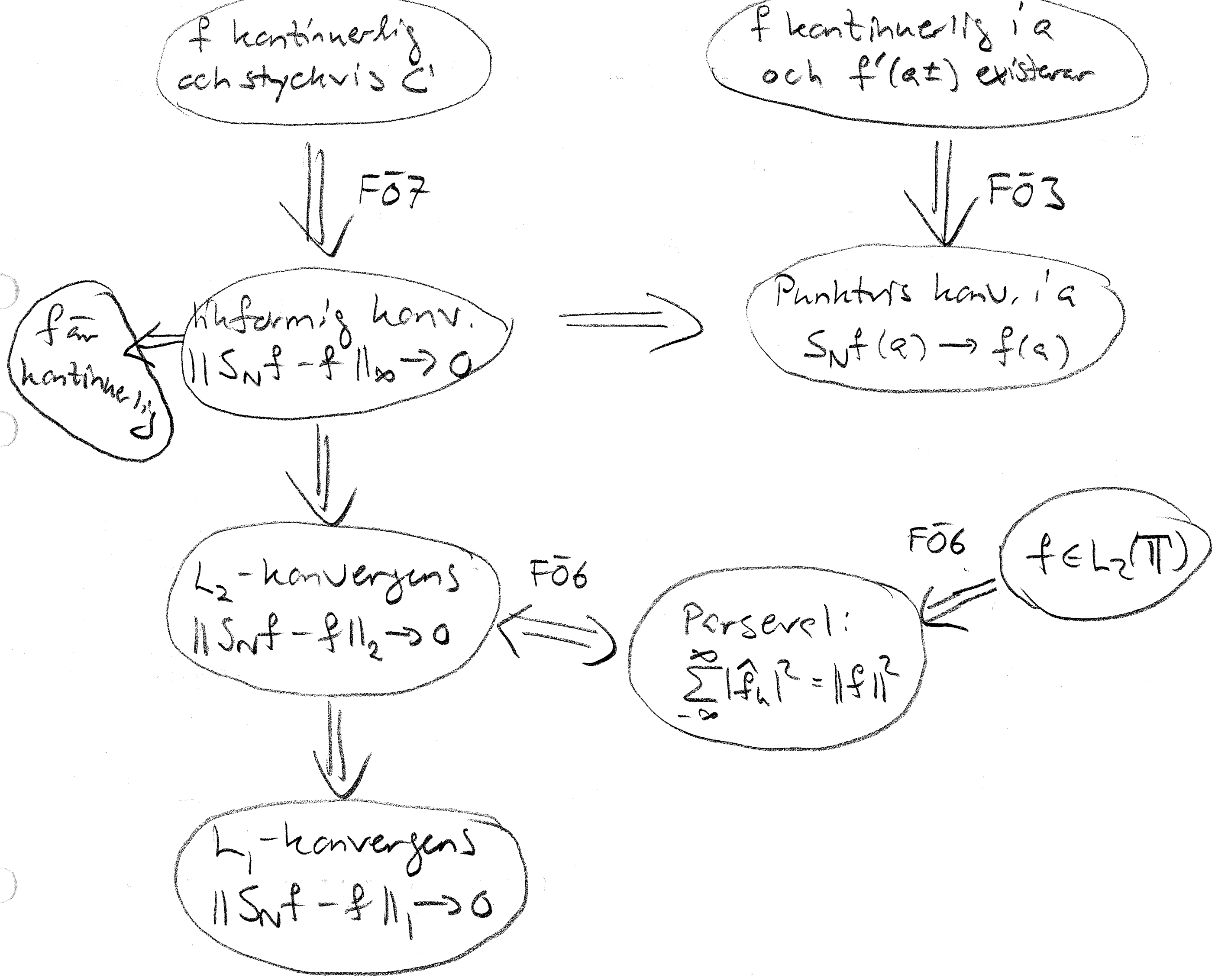
Denna typ av "översläng" på ungefär 9% förekommer hos alla Fourierserier där f har en språngdiskontinuitet.

Detta kallas Gibbs fenomen.

Sammanfattning av konvergensresultat:

Låt $f(x)$ vara en 2π-periodisk funktion med Fourierserie $f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikx}$.

Vi har visat:



Angående punktvis konvergens:

- Om f ej är kontinuerlig i $x=a$ utan enbart höger- och vänstergränsvärden $f(a\pm)$ existerar (och även $f'(a\pm)$ exist. som ovan) så visade vi på FÖ3 att
$$S_N f(a) \longrightarrow \frac{f(a+)+f(a-)}{2}$$
- Men kan visa att det finns en kontinuerlig funktion där, i en given punkt a, delsummorna $S_N f(a)$ divergerar. Kravet att $f'(a\pm)$ ska existera är alltså viktigt.

7:6 Angående L_1-konvergens:

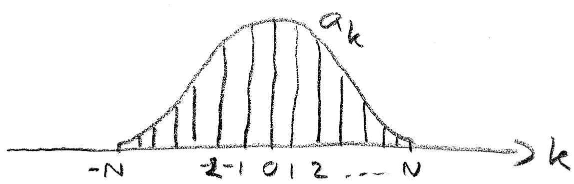
- Man kan visa att det finns en funktion $f \in L_1(\mathbb{T})$ vars Fourierserie ej konvergerar i $L_1(\mathbb{T})$.
- Vi kan alltså *inte* alltid garantera att

$$S_N f(x) = D_N * f(x) = \sum_{-N}^{N} \hat{f}_k e^{ikx} \longrightarrow f(x) \quad \text{i } L_1(\mathbb{T}).$$

Däremot visade vi på Fö 4 att de trigonometriska polynomen

$$T_N * f(x) = \left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^N * f(x) = \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}_k \cdot a_k \cdot e^{ikx},$$

där $a_k = \binom{2N}{N-k} \Big/ \binom{2N}{N}$



alltid konvergerar mot f i L_1-norm:

$$\| T_N * f - f \|_1 \to 0, \quad N \to \infty$$

<u>Övn</u>: Kontrollera följande formler för $T = 2\ell$-periodiska funktioner och vinkelfrekvens $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{\ell}$:

$$\hat{f}_k = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) e^{-ik\omega x} dx, \quad a_k = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos(k\omega x) dx, \; k \geq 1$$

$$a_0 = \hat{f}_0 = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) dx, \quad b_k = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin(k\omega x) dx, \; k \geq 1$$

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ik\omega x} = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x) \right)$$

$$\frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} |f(x)|^2 dx = \sum_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}_k|^2 = |a_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{1}^{\infty} \left(|a_k|^2 + |b_k|^2 \right)$$

Läsanvisningar till onsdag 29/11:

Läs satsen om likformig kontinuitet s. 45 och om Gibbs fenomen s. 46–49.

Den endimensionella vågekvationen

Vi ska här använda Fourierserier för att finna en funktion $u(x,t)$ som uppfyller:

(1) <u>vågekvationen</u> $u''_{tt}(x,t) = c^2 u''_{xx}(x,t)$

för $0 < x < l$, $t > 0$ ($c > 0$ och $l > 0$ är konstanter)

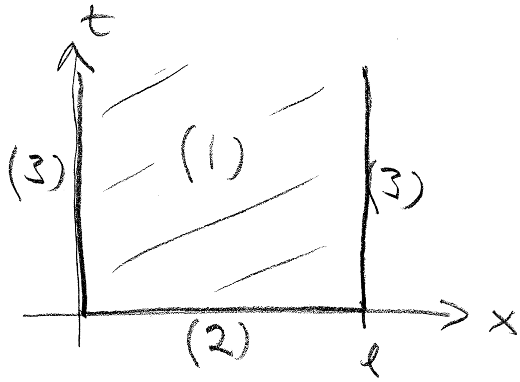
(2) <u>startvillkoren</u> $\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u'_t(x,0) = g(x) \end{cases}$, $x \in (0,l)$

där f och g är givna funktioner.

(3) <u>randvillkoren</u> $u(0,t) = u(l,t) = 0$, $\forall t > 0$

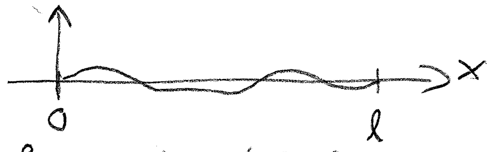
(dessa kallas Dirichlets randvillkor)

Under vissa villkor utgör detta en bra matematisk modell för vissa svängnings-förlopp i fysiken:



<u>Ex</u>: Betrakta en svängande sträng (t ex en fiolsträng) med längd l och fixa ändpunkter. Om $u(x,t)$ betecknar avståndet från jämviktsläget i punkten x vid tiden t, så kan man med Newtons andra lag ($F = ma$) visa att $u(x,t)$ approximativt uppfyller vågekvationen $u''_{tt} = c^2 u''_{xx}$,

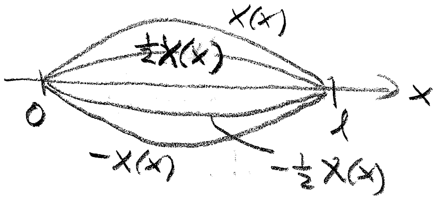
där c = våghastigheten $= \sqrt{T/\rho}$



om spännkraften är T och densiteten är ρ. Att strängen är fastsatt i ändarna formuleras som Dirichlets randvillkor och i startvillkoren betecknar $f(x)$ strängens ursprungliga form (vid tiden $t=0$) och $g(x)$ strängens rörelse vid $t=0$.

Den enklaste typen av svängning för en sträng är en <u>stående våg</u>, vilket matematiskt motsvaras av att

(8:2) variablerna x, t är separerade i funktionen, dvs $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$, där X och T är två envariabelfunktioner. Detta innebär att strängens form $X(x)$ inte ändras med tiden t annat än genom omskalning med $T(t)$



? Vilka separerade lösningar $u(x,t) = X(x)T(t)$ uppfyller (1) och (3) ?

Enligt (1) är $X(x)\,T''(t) = c^2 X''(x)\,T(t)$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{T''(t)}{T(t)}} \qquad (=: -\omega^2)$$

(A) Eftersom HL är konstant m.a.p. x är även VL det. Kallar vi denna konstant $-\omega^2$, får vi

$$X''(x) + \omega^2 X(x) = 0$$

$$\Rightarrow X(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)$$

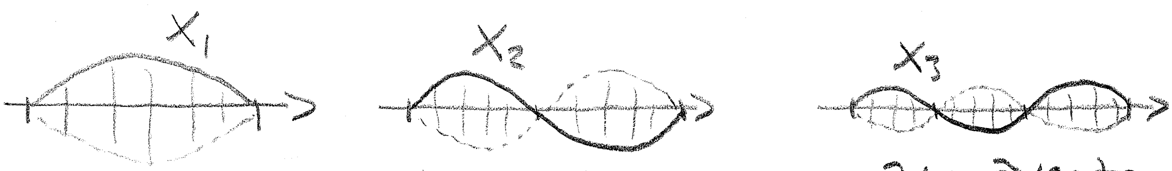
Vidare ser vi att Dirichlets randvillkor är uppfyllt omm $X(0) = 0 = X(l)$, dvs

$$\begin{cases} a = 0 \\ b\sin(\omega l) = 0 \end{cases}$$

För att få en icke-triviallösning $u(x,t) \neq 0$ måste $b \neq 0$

$$\Rightarrow \omega l = n \cdot \pi$$

Vi får lösningar $X_n(x) = \sin\left(n\frac{\pi}{l}x\right)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$



grundton 1:a överton 2:a överton

(B) För varje $n = 1, 2, 3, \ldots$ har vi hittat en lösning

$$u_n(x,t) = X_n(x)\,T_n(t) = T_n(t)\sin\left(n\frac{\pi}{l}x\right).$$

För att finna $T_n(t)$ resonerar vi analogt med (A): $X''(x)/X(x)$ beror ej på t, så $\frac{1}{c^2}\frac{T''(t)}{T(t)}$ $(=-\omega^2)$ är också oberoende av t

$$\Rightarrow T''(t) + (\omega c)^2 T(t) = 0$$

$$\Rightarrow T_n(t) = A_n\cos\left(n\frac{\pi}{l}ct\right) + B_n\sin\left(n\frac{\pi}{l}ct\right)$$

∴ En lösning till (1) och (3) är den stående vågen

$$u_n(x,t) = \underbrace{\left(A_n \cos(n\tfrac{\pi c}{\ell}t) + B_n \sin(n\tfrac{\pi c}{\ell}t)\right)}_{=T_n(t)} \sin(n\tfrac{\pi}{\ell}x)$$

där A_n, B_n är konstanter och $n = 1, 2, \ldots$.

(c) För den allmänna lösningen kommer vi ihåg att en funktion $v(x)$ på $[0,\ell]$ kan utvecklas i sinusserie:

Lemma: Låt $v(x)$ vara en funktion på $[0,\ell]$ och definiera $b_k := \frac{2}{\ell}\int_0^\ell v(x)\sin(k\frac{\pi}{\ell}x)\,dx$.
Under lämpliga förutsättningar på $v(x)$ (se sammanfattning FÖ7) gäller då att

$$v(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\tfrac{\pi}{\ell}x), \quad 0 \le x \le \ell$$

Bevis: Utvidga $v(x)$ till en udda funktion på $[-\ell,\ell]$:

$$w(x) := \begin{cases} v(x), & 0 < x < \ell \\ -v(-x), & -\ell < x < 0. \end{cases}$$

Som på FÖ1 blir w:s Fourierserie en sinusserie där $a_k = 0$, $b_k = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} w(x)\sin(k\frac{\pi}{\ell}x)\,dx = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell v(x)\sin(k\frac{\pi}{\ell}x)\,dx$.

OBS: Om $v(x)$ är kontinuerlig och styckvis C^1, och om $v(0) = v(\ell) = 0$, så blir $w(x)$ kont. & styckvis C^1. Enligt FÖ7 konv. då Fourierserien = sinusserien likformigt.

För att finna lösningen $u(x,t)$ till (1)–(3) fixerar vi tiden t och utvecklar $v(x) = u(x,t)$ i sinusserie där Fourierkoefficienterna $b_n = T_n(t)$ beror på t:

$$\boxed{u(x,t)} = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin(n\tfrac{\pi}{\ell}x)$$

$$= \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos(n\tfrac{\pi c}{\ell}t) + B_n\sin(n\tfrac{\pi c}{\ell}t)\right)\sin(n\tfrac{\pi}{\ell}x)} \quad (*)$$

Fysikaliskt betyder detta att vi delar upp strängens svängning i sina frekvenskomponenter.
Slutligen kan vi bestämma koefficienterna A_n, B_n från startvillkoren (2). Sätt $t = 0$ i $(*)$ och den termvis t-deriverade serien:

(8:4) $\Rightarrow \begin{cases} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\frac{\pi}{\ell}x) \\ g(x) = u_t'(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(n\frac{c\pi}{\ell}) \sin(n\frac{\pi}{\ell}x) \end{cases}$

Med lemmet kan vi härifrån beräkna A_n och $B_n(n\frac{c\pi}{\ell})$ som f:s respektive g:s Fourierkoefficienter.
Vi sammanfattar:

Sats: Antag att $\int_0^\ell |f'(x)|^2 dx < \infty$ och $\int_0^\ell |g(x)|^2 dx < \infty$ (enligt övn. A11 betyder detta att strängens totala energi initialt är ändlig) och att $f(0) = f(\ell) = 0$
Då konvergerar serien (*) likformigt mot en lösning $u(x,t)$ till (1), (2) och (3) om

$$\begin{cases} A_n := \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x) \sin(n\cdot\frac{\pi}{\ell}x)\,dx \\ B_n := \left(\frac{\ell}{nc\pi}\right)\frac{2}{\ell}\int_0^\ell g(x)\sin(n\frac{\pi}{\ell}x)\,dx. \end{cases}$$

En fördel med serieuttrycket (*) är att vi får en fullständig bild av svängningens frekvensspektrum: strängen ger toner med frekvenser (svängningar/sekund = Hertz = Hz)
$f_n = \frac{1}{2\pi}\cdot n\frac{\pi}{\ell}ct = n\frac{1}{2\ell}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$ och amplituderna av dessa toner är $\sqrt{A_n^2 + B_n^2}$, vilka bestäms av startvillkoren (2).
En nackdel är att man ibland önskar ha ett mer explicit uttryck för $u(x,t)$ (utan summa). I detta exempel kan vi skriva om serien mha produktreglerna

$$\begin{cases} \cos(b)\sin(a) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b)) \\ \sin(b)\sin(a) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b)) \end{cases}$$

enligt följande:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}\hat{f}_k\left(\sin(k\frac{\pi}{\ell}(x+ct)) + \sin(k\frac{\pi}{\ell}(x-ct))\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2c}\hat{g}_k\cdot\frac{1}{k\frac{\pi}{\ell}}\left(\cos(k\frac{\pi}{\ell}(x-ct)) - \cos(k\frac{\pi}{\ell}(x+ct))\right)$$

där $\hat{f}_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\sin(k\frac{\pi}{\ell}x)\,dx$, $\hat{g}_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell g(x)\sin(k\frac{\pi}{\ell}x)\,dx$ betecknar f och g:s sinuskoefficienter.
Den ~~första~~ serien blir

$$\frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct))$$

medan den andra kan skrivas

$$\frac{1}{2c}\sum_{n=1}^{\infty}\hat{g}_n\int_{x-ct}^{x+ct}\sin(n\tfrac{\pi}{\ell}s)\,ds = /\text{byt } \Sigma \leftrightarrow \int /$$
$$= \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds.$$

$$\therefore \boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+ct)+f(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds}$$

Detta kallas d'Alemberts formel för lösningen till vågekvationen.

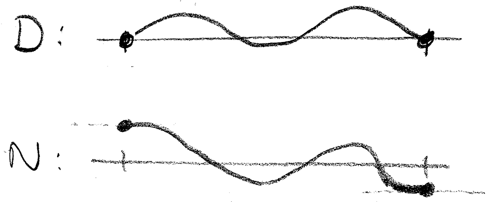
Neumanns randvillkor:

Ett annat naturligt randvillkor för vågekvationen är följande

(3′) $u'_x(0,t) = u'_x(\ell,t) = 0 \quad , \forall t>0$

(detta kallas Neumanns randvillkor)

Detta skulle t ex kunna ~~inträffa~~ om strängen är fri att röra sig i ändpunkterna utan friktion, vilket skulle ge en horisontell sträng i ändpunkterna.



Helt analogt med ovan kan vi finna $u(x,t)$ som uppfyller (1) (2), (3′). Låt oss peka ut vad som ändras i stegen (A), (B) och (C) i lösningen:

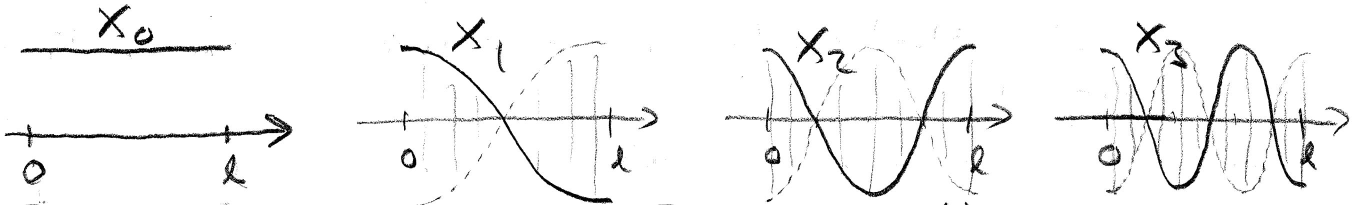
(A) För att $u(x,t) = X(x)T(t)$ ska uppfylla Neumanns randvillkor (3′) måste för $X(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)$ uppfylla $X'(0) = X'(\ell) = 0$.

$X'(x) = -a\omega\sin(\omega x) + b\omega\cos(\omega x)$

- Om $\omega = 0$, har vi en lösning $X_0(x) = 1$
- Om $\omega \neq 0$: $X'(0) = b\omega = 0 \Rightarrow b = 0$

  $X'(\ell) = 0 \Rightarrow \omega x = n\pi$

Vi får lösningar $X_n(x) = \cos(n\frac{\pi}{\ell}x)$, $n = 0,1,2,\ldots$



(B) För $n = 1,2,3,\ldots$ blir $T_n(t)$ som tidigare.

För $n=0$: $T''_0(t) = 0 \Rightarrow T_0(t) = A_0 + B_0 t$

(8:6) ∴ En lösning till (1) och (3') är den stående vågen

$u_0(x,t) = (A_0 + B_0 t)\cdot 1$

$u_n(x,t) = \left(A_n \cos(n\frac{\pi c}{\ell}t) + B_n \sin(n\frac{\pi c}{\ell}t)\right)\cos(n\frac{\pi}{\ell}x)$

(c) För den allmänna lösningen använder vi följande

Lemma: Låt $v(x)$ vara en funktion på $[0,\ell]$ och

låt $a_k := \frac{2}{\ell}\int_0^\ell v(x)\cos(k\frac{\pi}{\ell}x)\,dx$, $k=1,2,\ldots$

$a_0 := \frac{1}{\ell}\int_0^\ell v(x)\,dx$

Under lämpliga förutsättningar på $v(x)$ (se FÖ7)

gäller då att $v(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\frac{\pi}{\ell}x)$

Bevis: Utvidga v till en jämn 2ℓ-periodisk funktion w ■

Från startvillkoret (2) får vi nu A_n, B_n som tidigare;

Sats: Antag att $\int_0^\ell |f'(x)|^2dx < \infty$, $\int_0^\ell |g(x)|^2 dx < \infty$.

Låt $A_k := \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\cos(k\frac{\pi}{\ell}x)\,dx$, $k=1,2,\ldots$

$A_0 := \frac{1}{\ell}\int_0^\ell f(x)\,dx$

$B_k := \left(\frac{\ell}{kc\pi}\right)\frac{2}{\ell}\int_0^\ell g(x)\cos(k\frac{\pi}{\ell}x)\,dx$, $k=1,2,\ldots$

$B_0 := \frac{1}{\ell}\int_0^\ell g(x)\,dx$

Då konvergerar

$u(x,t) = A_0 + B_0 t + \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos(k\frac{c\pi}{\ell}t) + B_k \sin(k\frac{c\pi}{\ell}t)\right)\cos(k\frac{\pi}{\ell}x)$

likformigt mot en lösning $u(x,t)$ till (1), (2), (3').

Läsanvisningar till fredag 1/12:

- kap. 1 : Hur härleds vågekvationen från Newtons andra lag $F=ma$?
- kap. 5.1 : vad kan vågekvationen modellera förutom svängande strängen i fysiken?

Övn: ◦ Härled d'Alemberts formel direkt (utan att använda Fourierserier) genom att göra variabelbytet $y_1 = x+ct$, $y_2 = x-ct$.

- Visa att d'Alemberts formel definierar en funktion $u(x,t)$ som löser (1), (2), (3) om f och g utvidgas till udda 2π-periodiska funktioner.
- Gör motsvarande omskrivning av Fourierserielösningen med Neumanns randvillkor och visa att man får samma d'Alemberts formel.

Värmeledningsekvationen / Diffusionsekvationen:

Vi ska här använda Fourierserier för att finna en funktion $u(x,t)$ som uppfyller:

(1) Värmeledningsekvationen: $u'_t(x,t) = h \cdot u''_{xx}(x,t)$ för $0<x<l$, $t>0$ (h och l är positiva konstanter)

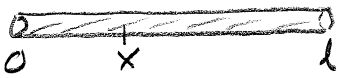
(2) Startvillkoret: $u(x,0) = f(x)$, $0<x<l$, där $f(x)$ är en given funktion.

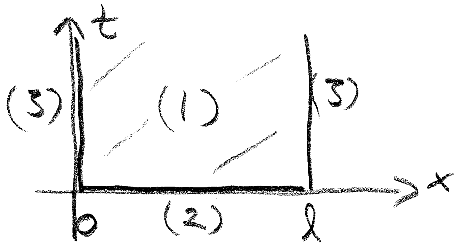
(3) Dirichlets randvillkor: $u(0,t) = u(l,t) = 0$, $\forall t>0$.

I stället för (3) kan vi alternativt kräva

(3') Neumanns randvillkor: $u'_x(0,t) = u'_x(l,t) = 0$, $\forall t>0$.

Ex: Betrakta en värmeledande stav av längd l





Om $u(x,t)$ betecknar temperaturen vid x och vid tiden t, så kan man visa att $u(x,t)$ uppfyller värmeledningsekvationen approximativt. Konstanten h bestäms i detta fall av materialets värmeledande egenskaper. Om stavens ändar är isolerade, formuleras detta som randvillkoret (3'), medan (3) motsvarar att stavens ändar hålls vid den fixa temperaturen 0.

Ex: Den partiella differentialekvationen (1) kallas ibland även diffusionsekvationen eftersom den också är en bra modell för diffusion av ett ämne i ett smalt ihåligt rör. I detta fall betecknar $u(x,t)$ koncentrationen / densiteten av ämnet vid x och vid tiden t.

För att lösa (1), (2), (3') till exempel, utvecklar vi $u(x,t)$, för fixt t, i cosinusserie som på FÖ8:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) \cos\left(k\frac{\pi}{l}x\right).$$

Genom att utveckla i cosinusserie, ser vi att varje term uppfyller (3'), och så gör även $u(x,t)$ förutsatt att serien konvergerar tillräckligt starkt.

(9:2) Vi översätter nu (1) till en ordinär differentialekvation för varje koefficient $T_k(t)$:

$$u'_t(x,t) = \sum_0^\infty T_k'(t)\cos(k\tfrac{\pi}{\ell}x)$$

$$h u''_{xx}(x,t) = \sum_0^\infty T_k(t)\left(-h(k\tfrac{\pi}{\ell})^2\right)\cos(k\tfrac{\pi}{\ell}x)$$

$$\Leftrightarrow \forall k:\ T_k'(t) + h(k\tfrac{\pi}{\ell})^2 T_k(t) = 0.$$

Vi löser denna 1:a ordningens diff. ekv. med integrerande faktor:

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{h(k\frac{\pi}{\ell})^2 t}\, T_k(t)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow T_k(t) = a_k e^{-h(k\frac{\pi}{\ell})^2 t}$$

Detta ger lösningen

$$\boxed{u(x,t) = a_0 + \sum_{k=1}^\infty a_k e^{-h(k\frac{\pi}{\ell})^2 t}\cos(k\tfrac{\pi}{\ell}x)} \quad (*)$$

där koefficienterna a_k bestäms av startvillkoret (2):

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{k=0}^\infty a_k\cos(k\tfrac{\pi}{\ell}x).$$

Med lemmat från FÖ 8 får vi

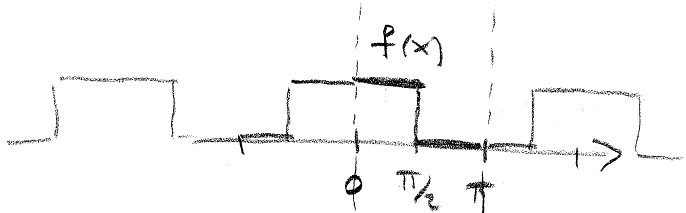
Sats: Antag att $\int_0^\ell |f(x)|dx < \infty$ (Om (1) modellerar diffusion och $u \geq 0$ är densiteten så betyder detta att den totala massan är ändlig enligt övn. A12)

Då konvergerar (*) för varje fixt t_0, likformigt mot en funktion $u(x,t_0)$ på $[0,\ell]$ som löser (1), (2), (3')

om
$$\begin{cases} a_k := \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\cos(k\frac{\pi}{\ell}x)\,dx, & k=1,2,\dots \\ a_0 := \frac{1}{\ell}\int_0^\ell f(x)\,dx \end{cases}$$

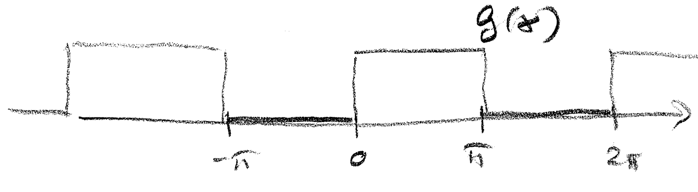
Ex: Låt $h=1$, $\ell=\pi$ och

$$f(x) = \begin{cases} 1; & 0<x<\pi/2 \\ 0; & \pi/2<x<\pi \end{cases}$$



För att utveckla f i cosinusserie på $(0,\pi)$ utvidgar vi f till en jämn 2π-periodisk funktion och beräknar Fourierkoefficienterna a_k. Alternativt kan vi återanvända räkningarna från FÖ 3, där vi såg att

$$g(x) := \begin{cases} 1; & 0<x<\pi \\ 0; & -\pi<x<0 \end{cases}$$



har sinusserie

$$g(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sin((2j+1)x)}{2j+1}$$

vilket ger

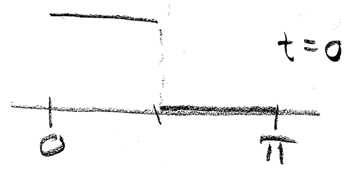
$$f(x) = g(x+\tfrac{\pi}{2}) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sin((2j+1)x + (2j+1)\frac{\pi}{2})}{2j+1}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2j+1} \cos((2j+1)x)$$

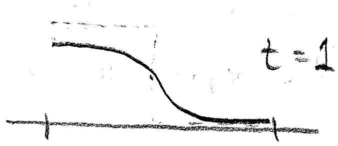
Med $f(x)$ som startvillkor blir lösningen $u(x,t)$ till (1),(2),(3'):

$$u(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2j+1} e^{-(2j+1)^2 t} \cos((2j+1)x)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} e^{-t}\cos x - \frac{2}{\pi}\frac{1}{3} e^{-9t}\cos(3x) + \dots$$



T.ex. för $t=1$ är $e^{-9} \approx 0.00012$ försumbar i förhållande till $e^{-1} = 0.36$.



Vi ser att efter tiden $t=1$ har den ursprungliga temperaturfördelningen $f(x)$ utjämnats något till

$$u(x,1) \approx \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} e^{-t}\cos x$$

Vi observerar några viktiga skillnader mellan lösningarna här till värmeledningsekvationen och lösningarna till vågekvationen från Fö 8:

- I en punkt (x,t) där $t>0$ är lösningen $u(x,t)$ till värmeledningsekvationen godtyckligt många gånger deriverbar, dvs alla derivator av alla ordningar existerar. Detta är en följd av faktorn $e^{-k(n\frac{\pi}{\ell})^2 t}$ i (*), vilket medför att (för fixt t) serien konvergerar mycket starkt, dvs termerna går snabbt mot 0.

- Till skillnad från vågekvationen, är formeln (*) meningslös om $t<0$ eftersom $e^{-k(n\frac{\pi}{\ell})^2 t} \to +\infty$ då, då $n \to \infty$. Detta har att göra med det faktum att värmeledning / diffusion är en irreversibel process (givet nuvarande temperaturfördelning kan inte fördelningen vid en tidigare tidpunkt beräknas.)

- Till skillnad från vågekvationen, är lösningen (*) här inte t-periodisk. Vi ser i (*) att

$$u(x,t) \longrightarrow a_0 = \frac{1}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\,dx, \quad \text{då } t \to +\infty \text{ för alla } x.$$

(9:4) Detta är som förväntat eftersom Neumanns randvillkor tolkas som att den värmeledande stavens ändar är isolerade. Ingen värme kan därför upptas/avges och då $t \to +\infty$ kommer den totala värmemängden från början $\int_0^l f(x)\,dx$ att fördelas jämnt över staven.

Blandade randvillkor:

Vi studerar nu istället randvillkoret

$$(3'') \quad u(0,t) = 0 = u'_x(l,t) \quad , \forall t > 0.$$

Ex: Då $u(x,t)$ modellerar värmeledning, tolkas det blandade randvillkoret $(3'')$ som att ändpunkten $x=0$ hålls vid en fix temperatur 0, medan ändpunkten $x=l$ hålls isolerad.

För att finna den lämpliga serieansatsen

$$u(x,t) = \sum_n T_n(t)\, X_n(x),$$

för det blandade randvillkoret $(3'')$:
värmeledningsekvationen för $X(x)\cdot T(t)$ är

$$\Leftrightarrow \quad T'(t)\,X(x) = h\,T(t)\,X''(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{h}\frac{T'(t)}{T(t)} = \text{konstant} \quad (=: -\omega^2)$$

$$\Rightarrow \quad X''(x) + \omega^2 X(x) = 0 \quad , \forall x.$$

Vi kommer ihåg att den allmänna lösningen till denna ekv. är: $X(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)$

Randvillkoren $(3'')$ ger nu att:

$$X(0) = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$X'(l) = b\omega\cos(\omega l) = 0 \Rightarrow \omega l = (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad , k = 0,1,2,\dots$$

Vi finner lösningar $X_k(x) = \sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{l}x\right)$, $k = 0,1,2,\dots$ och ser att det är lämpligt att, för fixt t, utveckla $u(x,t)$ i "halvtalig" sinusserie:

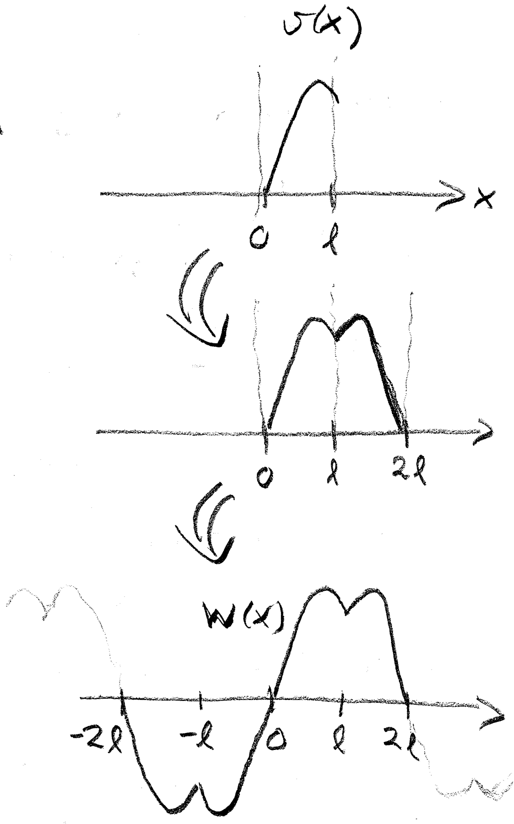
$$\boxed{u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_{2k+1}(t)\,\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{l}x\right)}$$

Följande lemma ger ytterligare ett sätt, förutom sinus och cosinusserier, att serieutveckla funktioner på $[0,l]$:

Lemma: Låt $v(x)$ vara en funktion på $[0,l]$ och definiera $c_{2k+1} := \frac{2}{l}\int_0^l v(x)\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{l}x\right)dx$, $k=0,1,\ldots$

Under lämpliga förutsättningar på $v(x)$ gäller då att

$$v(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1}\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{l}x\right)$$



Bevis: Utvidga $v(x)$ på $[0,l]$ till en $4l$-periodisk funktion $w(x)$ som är jämn med avseende på $x=l$ och udda m.a.p. $x=0$:

$$w(x) := \begin{cases} v(x) & ; \ 0<x<l \\ v(2l-x) & ; \ l<x<2l \\ -v(-x) & ; \ -l<x<0 \\ -v(2l+x) & ; \ -2l<x<-l \end{cases}$$

Eftersom $w(x)$ är udda är dess $4l$-periodiska Fourierserie en sinusserie:

$$w(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(n\frac{\pi}{2l}x\right), \text{ där}$$

$$c_n = \frac{2}{2l}\int_0^{2l} w(x)\sin\left(n\frac{\pi}{2l}x\right)dx$$

$$= \frac{1}{l}\int_0^l v(x)\sin\left(n\frac{\pi}{2l}x\right)dx + \overbrace{\frac{1}{l}\int_l^{2l} v(\underbrace{2l-x}_{=:s})\sin\left(n\frac{\pi}{2l}x\right)dx}^{=:I}$$

Vi gör variabelbytet $s=2l-x$ i andra integralen:

$$I = \frac{1}{l}\int_0^l v(s)\sin\Big(\underbrace{n\frac{\pi}{2l}(2l-s)}_{=n\pi - n\frac{\pi}{2l}s}\Big)ds = /\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a/$$

$$= -(-1)^n\int_0^l v(s)\sin\left(n\frac{\pi}{2l}s\right)ds$$

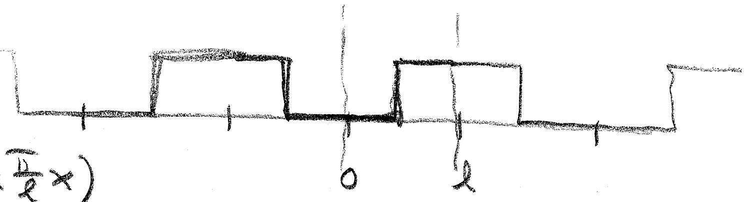
$$\Rightarrow c_n = \begin{cases} 0 & ; \ n \text{ jämn} \\ \frac{2}{l}\int_0^l v(x)\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2l}x\right)dx & , \ n=2k+1 \text{ udda.} \end{cases}$$

Detta visar lemmat ■

Ex: Betrakta $f(x) := \begin{cases} 0 & ; \ 0<x<l/2 \\ 1 & ; \ l/2<x<l \end{cases}$ på $[0,l]$:

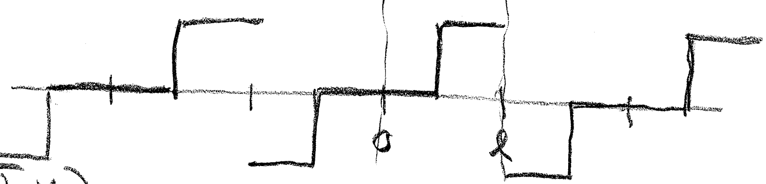
9:6

∘ Den jämna $2l$-periodiska utvidgningen ⇒



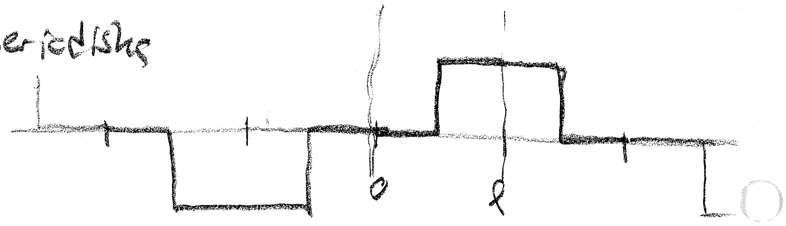
cosinusserien $f(x) \sim a_0 + \sum_1^\infty a_n \cos(n\frac{\pi}{l}x)$

∘ Den udda $2l$-periodiska utvidgningen ⇒



sinusserien $f(x) \sim \sum_1^\infty b_n \sin(n\frac{\pi}{l}x)$

∘ Den udda, l-jämna $2l$-periodiska utvidgningen ⇒



den heltaliga sinusserien

$$f(x) \sim \sum_0^\infty c_{2k+1} \sin\left(\left(k+\tfrac{1}{2}\right)\frac{\pi}{l}x\right)$$

Precis som sinusserien används vid randvillkoret (3) och cosinusserien används vid (3') (se Fö 8) så används heltalig sinusserie vid (3'') ovan.

T.ex. finner man lösningen

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^\infty c_{2k+1} e^{-h\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{l}\right)^2 t} \sin\left(\left(k+\tfrac{1}{2}\right)\frac{\pi}{l}x\right)$$

till värmeledningsproblemet (1), (2), (3'')

där c_{2k+1} är de heltaliga sinuskoefficienterna för startfunktionen $f(x)$.

Läsanvisningar till måndag 4/12:

kap. 5.2: värmeledningsekvationen

s. 59, andra halvan: blandade randvillkor

Laplaces ekvation på enhetsskivan:

Vi ska här använda Fourierserier för att finna en funktion $u(x,y)$ som uppfyller:

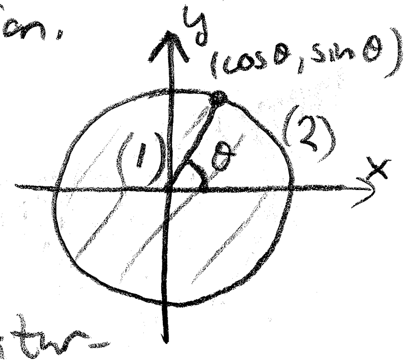
(1) Laplace ekvationen:

$$\Delta u(x,y) = u''_{xx}(x,y) + u''_{yy}(x,y) = 0 \quad \text{då } x^2+y^2<1.$$

(2) Randvillkoret:

$$u(\cos\theta, \sin\theta) = f(\theta) \quad , \forall\theta$$

där f är en given 2π-periodisk funktion.



Ex: Värmeledningsekvationen i två dimensioner är

$$u'_t = h(u''_{xx} + u''_{yy}) = h\cdot\Delta u(x,y),$$

vilket t ex kan modellera hur temperaturfördelningen i en ledande platta i xy-planet utvecklas med tiden t. Om temperaturen u hålls fix enligt randfunktionen $f(\theta)$ i (2) och den ledande plattan ifråga är enhetsskivan, kommer vi vid jämvikt då $t\to+\infty$ ha en stationär temperatur, dvs $\frac{\partial u}{\partial t}=0$. Jämviktstemperaturen $u(x,y) := \lim_{t\to\infty} u(x,y,t)$ kommer då uppfylla (1) & (2).

För att lösa (1) och (2) vill vi transformera $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ till polära koordinater r,θ:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \iff \begin{array}{l} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arctan\frac{y}{x} \end{array} \quad \text{om } x,y>0.$$

Enligt kedjeregeln gäller om $u(x,y)=v(r,\theta)$ att

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial\theta} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{-y/x^2}{1+(y/x)^2}\frac{\partial v}{\partial\theta}$$

$$= \frac{x}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{y}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\theta} = \cos\theta\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial\theta} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1/x}{1+(y/x)^2}\frac{\partial v}{\partial\theta}$$

$$= \frac{y}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{x}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\theta} = \sin\theta\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}$$

(10:2) Detta ger andraderivator

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \underbrace{\left(\cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)}_{=\partial/\partial x}\underbrace{\left(\cos\theta \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)}_{\partial u/\partial x}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&= \cos\theta\left(\cos\theta\, v''_{rr} - \sin\theta\left(-\frac{1}{r^2}v'_\theta + \cancel{\frac{1}{r}v''_{\theta r}}\right)\right)\\ &- \frac{\sin\theta}{r}\left(-\sin\theta\, v'_r + \cancel{\cos\theta\, v''_{r\theta}} - \frac{1}{r}\left(\cancel{\cos\theta\, v'_\theta} + \sin\theta\, v''_{\theta\theta}\right)\right)\end{aligned}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\left(\sin\theta \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned}&= \sin\theta\left(\sin\theta\, v''_{rr} + \cos\theta\left(-\frac{1}{r^2}v'_\theta + \cancel{\frac{1}{r}v''_{\theta r}}\right)\right)\\ &+ \frac{\cos\theta}{r}\left(\cos\theta\, v'_r + \cancel{\sin\theta\, v''_{r\theta}} + \frac{1}{r}\left(-\cancel{\sin\theta\, v'_\theta} + \cos\theta\, v''_{\theta\theta}\right)\right)\end{aligned}}$$

Detta ger, eftersom $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, att

$$\boxed{u''_{xx} + u''_{yy} = v''_{rr} + \frac{1}{r}v'_r + \frac{1}{r^2}v''_{\theta\theta}}$$

Vi har visat att $u(x,y)$ löser (1) och (2) omm motsvarande funktion $v(r,\theta)$ efter variabelbytet uppfyller:

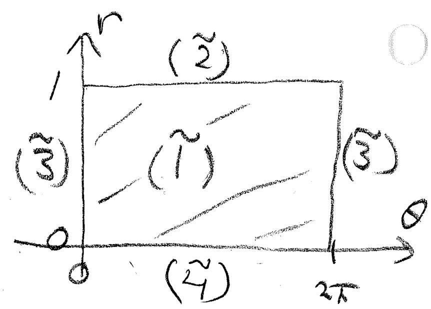
$(\tilde{1})$ Laplaces ekvation i polära koordinater:

$$0 = v''_{rr} + \frac{1}{r}v'_r + \frac{1}{r^2}v''_{\theta\theta} \quad \text{då} \quad 0<r<1$$

$(\tilde{2})$ "Startvillkoret": $v(1,\theta) = f(\theta)$

$(\tilde{3})$ "Periodiska randvillkor": $v(r,0) = v(r,2\pi)$ för $0<r<1$

$(\tilde{4})$ $v(0,\theta) = u(0,0) =$ konstant och ändlig.



Vi finner $v(r,\theta)$ genom att, för fixt $r \in (0,1)$ utveckla v i Fourierserie:

$$u(r,\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} R_k(r)\, e^{ik\theta}$$

Enligt $(\tilde{1})$ är

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\left(R''_k(r) + \frac{1}{r}R'_k(r) + (ik)^2\frac{1}{r^2}R_k(r)\right)e^{ik\theta} = 0, \quad \forall\theta$$

$$\Rightarrow \forall k: \quad r^2 R''_k(r) + r R'_k(r) - k^2 R_k(r) = 0$$

Detta är vad som kallas en Eulerekvation, och löses genom att göra variabelbytet $r = e^t$:

$$\frac{dR_k}{dt} = \frac{dr}{dt}\frac{dR_k}{dr} = r\frac{dR_k}{dr}$$

$$\frac{d^2R_k}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(r\frac{dR_k}{dr}\right) = r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR_k}{dr}\right) = r\frac{dR_k}{dr} + r^2\frac{d^2R_k}{dr^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2R_k}{dt^2} = k^2 R_k(t)$$

Denna linjära ekvation med konstanta koefficienter har karakteristisk ekvation $\lambda^2 - k^2 = 0$ med lösningar $\lambda = \pm k$, så vi får den allmänna lösningen

$$R_k = a e^{kt} + b e^{-kt} = a r^k + b r^{-k}.$$

Enligt ($\tilde{4}$) vill vi att $R_k|_{r=0}$ ska vara väldefinierat, vilket ger lösningarna

$$R_k(r) = \begin{Bmatrix} c_k r^k, & k \geq 0 \\ c_k r^{-k}, & k < 0 \end{Bmatrix} = c_k r^{|k|}$$

$$\therefore \quad \boxed{u(r,\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k r^{|k|} e^{ik\theta}} \quad (*)$$

Om serien konvergerar definierar summan en funktion $u(r,\theta)$ som uppfyller ($\tilde{1}$), ($\tilde{3}$) och ($\tilde{4}$). För att finna koefficienterna använder vi ($\tilde{2}$):

$$f(\theta) = u(1,\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\theta},$$

dvs c_k ska väljas som f:s Fourierkoefficienter.

- Vi kan också betrakta $(*)$ som en faltning: givet $u(x,y) = f(\theta)$ på enhetscirkeln $x^2+y^2=1$, erhålls $u(x,y)$ på cirkeln $x^2+y^2=r^2$, dvs u:s värden för fixt r, genom faltning med funktionen $P_r(\theta)$ med Fourierkoefficienter $\widehat{(P_r)}_k = r^{|k|}$:

$$u(r,\theta) = (f * P_r)(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\hat{f}_k}_{=c_k} \cdot \underbrace{\widehat{(P_r)}_k}_{=r^{|k|}} e^{ik\theta}$$

Låt oss beräkna:

$$P_r(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ik\theta} = \sum_{-\infty}^{-1} (re^{-i\theta})^{-k} + 1 + \sum_{1}^{\infty} (re^{i\theta})^k =$$

$$= (re^{-i\theta}) \sum_{0}^{\infty} (re^{-i\theta})^k + 1 + (re^{i\theta}) \sum_{0}^{\infty} (re^{i\theta})^k =$$

(10:4) $= \dfrac{re^{-i\theta}}{1-re^{-i\theta}} + 1 + \dfrac{re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}} = \dfrac{1}{1-re^{-i\theta}} + \dfrac{re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}} =$

$$= \frac{1-re^{i\theta} + re^{i\theta}(1-re^{-i\theta})}{1+r^2-2r\cos\theta} = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta}$$

Defn: Funktionerna

$$P_r(\theta) := \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta} = \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ik\theta}$$

kallas Poissonkärnan för enhetskivan.

Övning: Visa att P_r, $0<r<1$, utgör en approximativ enhet då $r \to 1^-$ (definierat analogt som för T_N, $N\to\infty$, på FÖ 4.)

Lösningen $u(r,\theta)$ kan alltså också skrivas

$$\boxed{u(r,\theta) = (f * P_r)(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - t)\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(t)}\,dt} \quad (**)$$

Betrakta nu istället följande randvärdesproblem i det yttre av enhetcirkeln: Finn $u(x,y)$ s.a.

(1') $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$ då $x^2+y^2>1$.

(2') $u(\cos\theta, \sin\theta) = f(\theta)$, $\forall\theta$,
där f är en given 2π-periodisk funktion

(3') $|u(x,y)| \le C$ för alla $x^2+y^2>1$, dvs
vi antar att u är en begränsad funktion.

Med räkningar som ovan kommer vi nu fram till lösningen

$$u(r,\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_k r^{-|k|} e^{ik\theta}, \quad r>1,$$

eftersom vi nu väljer $R_k(r) = r^{-|k|}$ för att uppfylla (3').
Skrivet som en faltning har vi

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta-t)\frac{r^2-1}{1+r^2-2r\cos(t)}\,dt,$$

där $P_r(\theta) := \dfrac{r^2-1}{1+r^2-2r\cos(\theta)}$, $r>1$, är Poissonkärna för området utanför enhetscirkeln.

Ex: Vi löser randvärdesproblemet (1), (2) för (10.15)

$$f(\theta) = \begin{cases} 1 & ; \ 0<\theta<\pi \\ 0 & ; \ -\pi<\theta<0 \end{cases}$$

Enligt (**) blir $v(r,\theta)$, dvs $u(x,y)$ i enhetsskivan $x^2+y^2<1$, lika med

$$v(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta-\pi}^{\theta} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos t}\,dt$$

Alternativt kan vi använda (*): enligt FÖ3 är $f(\theta) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)\theta)}{2k+1}$

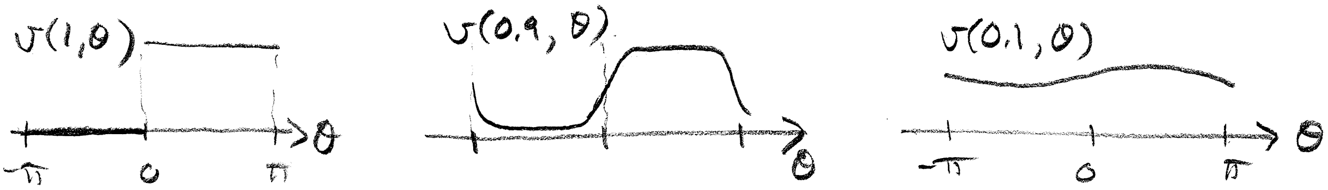
så $v(r,\theta) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{2k+1}}{2k+1}\sin((2k+1)\theta)$

Integralen / summan kan här beräknas och har värdet $v(r,\theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{2r}{1-r^2}\sin\theta\right)$

så $u(x,y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{2y}{1-x^2-y^2}\right)$.

Övn (mer avancerad) Visa detta t ex med hjälp av

$$\int \frac{dt}{a-\cos t} = \frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right), \quad a>1, \ |t|<\pi$$



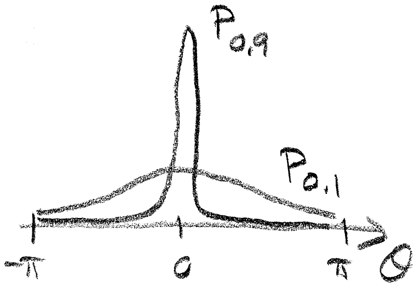
Vi observerar följande egenskaper hos lösningen $u(x,y)$ till (1), (2):

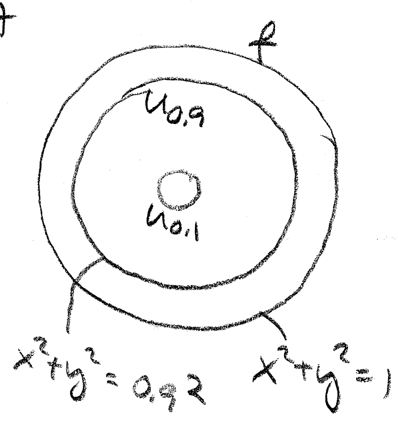
- För alla randfunktioner $f(\theta)$, t ex den diskontinuerliga funktionen i exemplet, är lösningen $u(x,y)$ godtyckligt många gånger deriverbar, dvs alla partiella derivator $\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial x^n} u(x,y)$ existerar i alla punkter $x^2+y^2<1$.
  Detta är en följd av att faktorn $r^{|k|}$ i (*) går mot 0 exponentiellt snabbt då $k\to\pm\infty$ vilket medför att serien konvergerar starkt då $r<1$.

10:6 ∘ Eftersom Poissonkärnan P_r, $0<r<1$ är en approximativ enhet då $r \to 1^-$ följer det att funktionerna

$$u_r(\theta) = u(r,\theta) = (f * P_r)(\theta)$$

konvergerar mot randfunktionen f. Som i lemmat på FÖ4 visas t ex att $\|u_r - f\|_1 \to 0$, $r \to 1^-$.

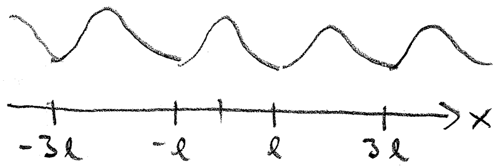




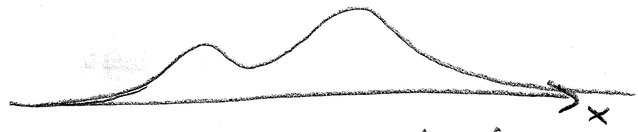
<u>Läsanvisningar till onsdag 6/12:</u>

kap. 5.3: visa att Poissonkärnan är en approximativ enhet.

Fouriertransformen:



2ℓ-periodisk funktion



ickeperiodisk funktion

Vi har hittills studerat Fourierserier för periodiska funktion. Nu betraktar vi istället motsvarande teori för icke-periodiska funktioner $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

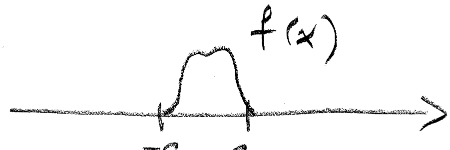
<u>Kom ihåg</u>: Vi skriver att $f \in L_1(\mathbb{R})$ om f har absolut-konvergent integral över $\mathbb{R}$, dvs $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty$.

<u>Defn</u>: Om $f \in L_1(\mathbb{R})$, så definieras dess <u>Fouriertransform</u> som funktionen

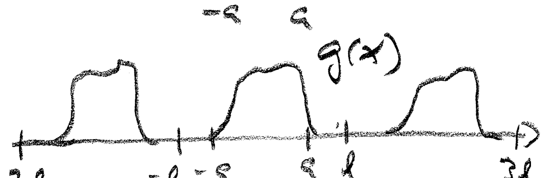
$$F\{f\}(\xi) = \hat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\xi x}\, dx \quad , \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

/alternativa definitioner som t ex.
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\xi x} dx$ och $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi\xi x} dx$ förekommer också/

Låt oss jämföra Fouriertransformen med Fourierkoefficienter:
Antag att $f \in L_1(\mathbb{R})$ har kompakt stöd, dvs vi antar att $f(x) = 0$ för alla x utanför ett begränsat intervall $[-a, a]$.



Låt $\ell > a$ och låt $g(x)$ vara den 2ℓ-periodiska utvidgningen av $f(x)$. Vi får:



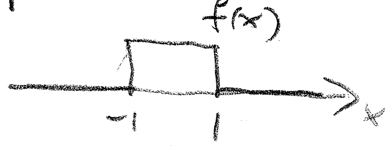
$$\hat{g}_k = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} g(x)\, e^{-ik\frac{\pi}{\ell}x}\, dx$$

$$= \frac{1}{2\ell} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i(k\frac{\pi}{\ell})x}\, dx = \frac{1}{2\ell} \hat{f}(\xi_k) \quad , \text{där } \xi_k := k\frac{\pi}{\ell}$$

$\therefore$ Fourierkoefficienterna till g är, sånärsom på faktorn $1/2\ell$, lika med Fouriertransformen till f på mängden $\frac{\pi}{\ell}\mathbb{Z} = \{\ldots, -2\frac{\pi}{\ell}, -\frac{\pi}{\ell}, 0, \frac{\pi}{\ell}, 2\frac{\pi}{\ell}, \ldots\}$.

För stora ℓ ligger punkterna $k\frac{\pi}{\ell}$ nära varandra, och Fouriertransformen kan intuitivt ses som Fourierkoefficienterna då periodlängden ℓ växer mot ∞.

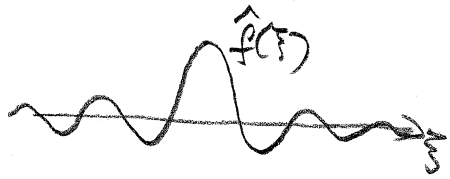
(11:2) Ex: Låt $f(x) = \chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$



$$\Rightarrow \hat{f}(\xi) = \int_{-1}^{1} e^{ix\xi}\,dx = \frac{e^{i\xi} - e^{-i\xi}}{i\xi} = \frac{2}{\xi}\sin\xi$$

Notera att $\int_{-\infty}^{\infty} \left| 2\frac{\sin\xi}{\xi} \right| dx = \infty$

dvs $\hat{f} \notin L_1(\mathbb{R})$ (trots att $f \in L_1(\mathbb{R})$).



Ex: Låt $f(x) := e^{-ax^2}$, där $a > 0$ är en konstant

$$\Rightarrow \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-i\xi x}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x^2 + \frac{i\xi}{a}x)}\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left((x + \frac{i\xi}{2a})^2 + \frac{\xi^2}{4a^2}\right)}dx = e^{-\frac{\xi^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sqrt{a}x + \frac{i\xi}{2\sqrt{a}})^2}dx$$

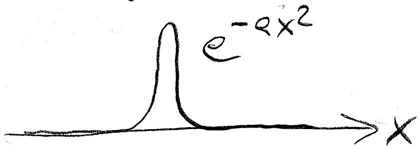
$$= /\sqrt{a}x + \frac{i\xi}{2\sqrt{a}} = t/ = e^{-\xi^2/4a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\frac{dt}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$$

(Med teori från komplex analys kan man rättfärdiga det komplexa variabelbytet)

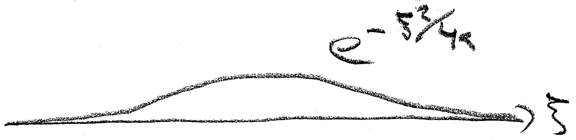
Notera att då $a = \frac{1}{2}$ är

$F\{e^{-x^2/2}\} = \sqrt{2\pi}\, e^{-\xi^2/2}$, dvs $e^{-x^2/2}$ är

en egenfunktion till Fouriertransformen.



/a>>1/



Sats: Om $f \in L_1(\mathbb{R})$, så är $\hat{f}$ en kontinuerlig funktion och $\lim_{\xi \to \pm\infty} \hat{f}(\xi) = 0$.

Bevis: Att $\hat{f}(\xi) \xrightarrow{\xi \to \pm\infty} 0$ är precis Riemann-Lebesgues lemma från FÖ 3.

För att visa att $\hat{f}$ är kontinuerlig betraktar vi de trunkerade integralerna

$$g_n(\xi) := \int_{-n}^{n} f(x) e^{-ix\xi}\,dx.$$

Dessa är alla kontinuerliga, ty

$$|g_n(\xi_2) - g_n(\xi_1)| \le \int_{-n}^{n} |f(x)| \cdot |e^{-ix\xi_2} - e^{-ix\xi_1}|\,dx$$

/genom att betrakta enhetscirkeln ser vi att
$|e^{-ix\xi_2} - e^{-ix\xi_1}| \le |(-ix\xi_2) - (-ix\xi_1)| = |x| \cdot |\xi_1 - \xi_2|$ /

$$\le \int_{-n}^{n} |f(x)| \cdot |x| \cdot |\xi_1 - \xi_2|\,dx \le |\xi_1 - \xi_2| \cdot \underbrace{\left(n \int_{-n}^{n} |f(x)|\,dx\right)}_{= \text{konstant för fixt } n.}$$

$\leq C|\xi_1 - \xi_2| \to 0$ då $\xi_2 \to \xi_1$.

Vidare gäller att $g_n \to \hat{f}$ likformigt då $n \to \infty$, ty

$$\forall \xi: |\hat{f}(\xi) - g_n(\xi)| = \left| \int_{|x|>n} f(x) e^{-ix\xi} dx \right| \leq \int_{|x|\geq n} |f(x)| dx$$

$$\Leftrightarrow \|\hat{f} - g_n\|_\infty \leq \int_{|x|\geq n} |f(x)| dx \to 0, \quad n \to \infty$$

Enligt sats 2.4.9 är därför $\hat{f}$ en kontinuerlig fkn ∎

Betrakta nu inversen till Fouriertransformen $F: f \mapsto \hat{f}$, dvs givet $\hat{f}$ vill vi beräkna f : $F^{-1}: \hat{f} \mapsto f$.

Analogt med FÖ3 ska vi här visa följande inversionsformel:

<u>Sats</u>: Låt $f \in L_1(\mathbb{R})$ och antag att höger- och vänster-gränsvärden $f(x\pm)$ och höger- och vänsterderivator $f'(x\pm)$ existerar i punkten $x \in \mathbb{R}$.

Då är

$$\boxed{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}}$$

Vänsterledet ska här tolkas som den eventuellt betingat konvergenta integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi = \lim_{N \to \infty} \int_{-N}^{N} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

<u>Ex</u>: Vi har sett att

$$f(x) = \chi_{[-1,1]}(x) \Rightarrow \hat{f}(\xi) = 2 \frac{\sin \xi}{\xi}.$$

Inversionsformeln ger här att

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2 \frac{\sin \xi}{\xi} e^{ix\xi} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \xi}{\xi} \cos(x\xi) d\xi = \begin{cases} 1 & , |x|<1 \\ 1/2 & , |x|=1 \\ 0 & , |x|>1. \end{cases}$$

Speciellt är $\int_0^\infty \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi = \frac{\pi}{2}$. Vi kommer att använda detta i beviset av inversionsformeln och behöver därför ett alternativt bevis för att undvika cirkelbevis.

<u>Lemma</u>: $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

(observera att integralen bara är betingat konvergent)

(11:4) <u>Bevis</u>: Vi uppdelar $\frac{1}{x}$ som

$\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-xy}\,dy$. Detta ger att:

$$\int_0^N \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^N \left(\int_0^\infty e^{-xy} \sin x\,dy \right) dx = \text{/dubbelint. är absolut konvergent över } (0,N)\times(0,\infty)\text{/}$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^N e^{-xy} \sin x\,dx \right) dy = \operatorname{Im}\left\{ \int_0^\infty \left(\int_0^N e^{x(i-y)}\,dx \right) dy \right\}$$

$$= \operatorname{Im}\left\{ \int_0^\infty \frac{e^{N(i-y)} - 1}{i-y}\,dy \right\} = \operatorname{Im}\left\{ \int_0^\infty \frac{y+i}{y^2+1}\,dy + \int_0^\infty \frac{e^{N(i-y)}}{i-y}\,dy \right\}$$

$$= \underbrace{\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2}}_{I} + \underbrace{\int_0^\infty e^{-Ny} \operatorname{Im}\left(\frac{e^{iN}}{i-y} \right) dy}_{II}$$

Vi ser att $I = \pi/2$ och

$|II| \leq \int_0^\infty e^{-Ny}\,dy = \frac{1}{N} \to 0,\ N \to \infty$. ∎

Analogt med FÖ3 skriver vi först om "delintegralerna" i inversionsformeln som

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-N}^N \hat{f}(\xi)\,e^{ix\xi}\,d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-N}^N \left(\int_{-\infty}^\infty f(t)\,e^{-it\xi}\,dt \right) e^{ix\xi}\,d\xi$$

$$= \int_{-\infty}^\infty \Big(\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-N}^N e^{i\xi(x-t)}\,d\xi}_{D_N(x-t)} \Big) f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty D_N(x-t)\,f(t)\,dt.$$

<u>Defn</u>: <u>Dirichletkärnan</u> för Fouriertransformen är

$$D_N(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-N}^N e^{i\xi s}\,d\xi = \frac{1}{\pi}\,\frac{\sin(Ns)}{s}$$

Notera att lemmat visar att $\int_{-\infty}^\infty D_N(s)\,ds = 1$

<u>Bevis av inversionsformeln</u>:

Enligt ovan behöver vi visa att

$$\int_{-\infty}^\infty D_N(x-t)\,f(t)\,dt \longrightarrow \frac{f(x+)+f(x-)}{2}, \quad N \to \infty.$$

Vi gör först omskrivningen

$$\int_{-\infty}^\infty D_N(x-t)\,f(t)\,dt = /x-t=s/ = \int_{-\infty}^\infty f(x-s)\,D_N(s)\,ds$$

$$= \underbrace{\int_{-1}^{1} f(x-s)\, D_N(s)\, ds}_{=:\mathrm{I}} + \underbrace{\int_{|s|>1} f(x-s)\, D_N(s)\, ds}_{=:\mathrm{II}}.$$

Enligt Riemann-Lebesgues lemma gäller att

$$\mathrm{II} = \int_{|s|>1} \frac{f(x-s)}{\pi s} \sin(Ns)\, ds$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(s)\, e^{iNs} ds - \int_{-\infty}^{\infty} g(s)\, e^{-iNs} ds \to 0,\ N \to \infty$$

eftersom $g(s) := \begin{cases} f(x-s)/2i\pi s & ; |s|>1 \\ 0 & ; |s|<1 \end{cases}$ tillhör $L_1(\mathbb{R})$.

För den lokala integralen I gör vi liknande omskrivning som på FÖ 3:

$$\mathrm{I} = \int_0^1 f(x-s)\, D_N(s)\, ds + \underbrace{\int_{-1}^{0} f(x-s)\, D_N(s)\, ds}_{=/s=-t/=\int_0^1 f(x+t) \underbrace{D_N(-t)}_{=D_N(t)} dt}$$

$$= \underbrace{\int_0^1 (f(x-s) - f(x-))\, D_N(s)\, ds}_{=:\mathrm{III}} + \underbrace{\int_0^1 (f(x+s) - f(x+))\, D_N(s)\, ds}_{=:\mathrm{IV}}$$
$$+ (f(x+) + f(x-)) \underbrace{\int_0^1 D_N(s)\, ds}_{=:\mathrm{V}}$$

T.ex för IV gäller att

$$\mathrm{IV} = \int_0^1 \underbrace{\frac{f(x+s) - f(x+)}{s}}_{\in L_1(0,1)} \frac{1}{\pi} \sin(Ns)\, ds \longrightarrow 0,\ N \to \infty$$

enligt Riemann-Lebesgues lemma analogt med II ovan. Notera att detta gäller på grund av att $\int_0^1 \left| \frac{f(x+s) - f(x+)}{s} \right| ds < \infty$, vilket är en konsekvens av att

- $f \in L_1(\mathbb{R})$, och
- högerderivatan $f'(x+) = \lim_{s \to 0} \frac{f(x+s) - f(x+)}{s}$ antas existera.

På liknande sätt visas att $\mathrm{III} \to 0$ p.g.a att vänsterderivatan $f'(x-)$ existerar.

(11:6) Slutligen beräknar vi integralen V:

$$\mathrm{V} = \int_0^1 D_N(s)\,ds = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\sin(Nx)}{x}\,dx = /t = Nx/$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^N \frac{\sin t}{t/N}\,\frac{dt}{N} = \frac{1}{\pi}\int_0^N \frac{\sin t}{t}\,dt \to \frac{1}{2}$$

enligt lemmat. Vi har därmed visat att

$$\int_{-\infty}^{\infty} D_N(x-t)f(t)\,dt \to \left(0+0+\left(f(x+)+f(x-)\right)\frac{1}{2}\right)+0 = \frac{f(x+)+f(x-)}{2} \quad \blacksquare$$

Läsanvisningar till fredag 8/12:

s.71–72: kontrollera de grundläggande räknereglerna 6.1.3.

Plancherels sats:

Kom ihåg: För 2π-periodiska funktioner f gäller att $\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|\,dt \le \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\,dt} = \|f\|_2$ och därför är $L_2(\mathbb{T}) \subset L_1(\mathbb{T})$. Av detta följer att för $f\in L_2(\mathbb{T})$ är integralen $\hat{f}_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt$ absolutkonvergent och därmed $\hat{f}_n$ väldefinierad.

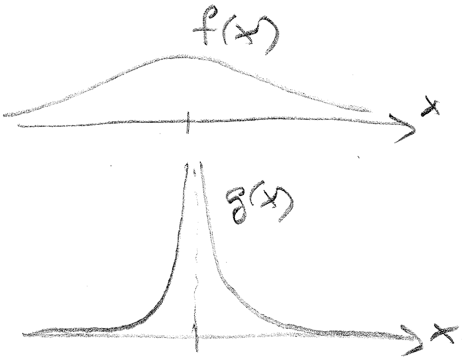
För Fouriertransformen är situationen annorlunda:

Ex: Kom ihåg: $L_1(\mathbb{R}) := \{f:\mathbb{R}\to\mathbb{C};\ \int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt<\infty\}$

$L_2(\mathbb{R}) := \{f:\mathbb{R}\to\mathbb{C};\ \int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,dt<\infty\}$.

Låt $a>0$ och betrakta funktionerna

$f(x) := \frac{1}{(1+|x|)^a}$, $g(x) := \frac{1}{|x|^a}e^{-|x|}$



Notera att

$f(x) \approx \frac{1}{|x|^a}$ då $|x| \gg 1$

$g(x) \approx \frac{1}{|x|^a}$ då $|x| \ll 1$

Vi ser att:

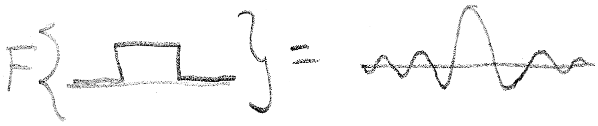
$f\in L_2(\mathbb{R})$ om $a>\frac{1}{2}$, men $f\in L_1(\mathbb{R})$ bara då $a>1$

$g\in L_1(\mathbb{R})$ om $a<1$, men $g\in L_2(\mathbb{R})$ bara då $a<\frac{1}{2}$

"Generellt är en L_2-funktion lägre och bredare än en L_1-funktion"

Ex: På Fö11 såg vi att

$\mathcal{F}\{\chi_{(-1,1)}(x)\} = 2\frac{\sin\xi}{\xi}$



Här gäller att $\chi_{(-1,1)} \in L_1(\mathbb{R})\cap L_2(\mathbb{R})$ och $\frac{\sin\xi}{\xi}\in L_2(\mathbb{R})$ men $\frac{\sin\xi}{\xi}\notin L_1(\mathbb{R})$ eftersom $\frac{\sin\xi}{\xi}\to 0$ bara långsamt då $\xi\to\pm\infty$.

Kom ihåg från Fö11: Om $f\in L_1(\mathbb{R})$ är $\hat{f}$ en kontinuerlig funktion och $\lim_{\xi\to\pm\infty}\hat{f}(\xi)=0$.

Om $f\in L_2(\mathbb{R})$ men $f\notin L_1(\mathbb{R})$ kan vi inte utan vidare definiera $\hat{f}(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}\,dx$ eftersom denna integral inte är absolutkonvergent.

Vårt mål idag är att visa följande sats:

12:2 **Sats (Plancherel):** Låt $f \in L_2(\mathbb{R})$ och definiera de trunkerade funktionerna $f_N(x) := \begin{cases} f(x) \, ; & |x| < N \\ 0 \, ; & |x| > 0 \end{cases}$

Då konvergerar $\hat{f}_N(\xi) = \int_{-N}^{N} f(x) e^{-i\xi x} dx$

i L_2-norm mot en funktion $\hat{f}$ som per definition är f:s Fouriertransform. För $F: f \longmapsto \hat{f}$ gäller att

(1) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} F$ är *isometrisk*, dvs $\| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F\{f\} \|_2 = \|f\|_2$

eller explicit: $\boxed{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx}$

(2) $F: L_2(\mathbb{R}) \longrightarrow L_2(\mathbb{R})$ är *bijektiv*, dvs för varje funktion $g \in L_2(\mathbb{R})$ finns en och endast en funktion $f \in L_2(\mathbb{R})$ s.a. $g(\xi) = \hat{f}(\xi)$ nästan överallt.

Den inversa Fouriertransformen $F^{-1}: \hat{f} \longmapsto f$ ges av

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2\pi} \hat{\hat{f}}(-x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi} = \frac{1}{2\pi} \lim_{N \to \infty} \int_{-N}^{N} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi,$$

för nästan alla $x \in \mathbb{R}$.

Ex: Plancherels formel på exemplet ovan ger att

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| 2 \frac{\sin \xi}{\xi} \right|^2 d\xi = \int_{-1}^{1} |1|^2 dx$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2} d\xi = \pi$$

Detta ger ett alternativt bevis till lemmat på FÖ11:

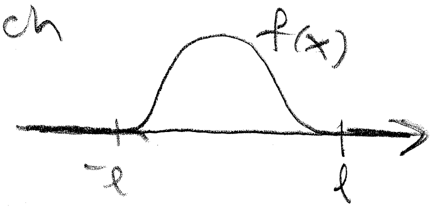
$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{\substack{N \to \infty \\ \varepsilon \to 0^+}} \Big(\underbrace{\Big[\frac{1 - \cos x}{x} \Big]_{\varepsilon}^{N}}_{\to 0} + \int_{\varepsilon}^{N} \frac{1 - \cos x}{x^2} \Big) = \int_0^{\infty} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} dx$$

$$= / \tfrac{x}{2} = \xi / = \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2} d\xi = \frac{\pi}{2}$$

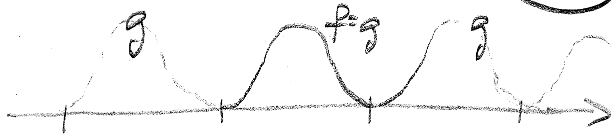
För beviset av Plancherels sats behöver vi följande:

Lemma: Antag att $f \in L_2(\mathbb{R})$ har kompakt stöd, dvs $f(x) = 0$ för alla x utanför ett begränsat intervall $[-\ell, \ell]$. Då är $f \in L_1(\mathbb{R})$ och

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx$$



Bevis: Betrakta som på Fö 11 motsvarande
$2l$-periodiska funktion
$g(x) = f(x)$, $|x| \le l$.



Dess Fourierkoefficienter är

$$\hat{g}_k = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\, e^{-ik\pi/l\, x}\, dx = \frac{1}{2l}\hat{f}\left(k\frac{\pi}{l}\right)$$

Parsevals formel för $2l$-periodiska funktioner ger:

$$\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} |\underbrace{f(x)}_{=g}|^2\, dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{g}_k|^2 = \frac{1}{4l^2}\sum_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}\left(k\frac{\pi}{l}\right)\right|^2 \quad (*)$$

- Fixera nu $t \in (0, \pi/l)$ och betrakta funktionen $f(x)\, e^{-ixt}$, vilken har Fouriertransf. $\hat{f}(\xi + t)$.

Ersätter vi f med $f(x)e^{-ixt}$ i $(*)$ får vi:

$$\int_{-l}^{l} |f(x)e^{-ixt}|^2 dx = \int_{-l}^{l} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2l}\sum_{-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}\left(k\frac{\pi}{l} + t\right)\right|^2$$

Integration med avseende på t ger nu:

$$\int_0^{\pi/l}\left(\int_{-l}^{l}|f(x)|^2 dx\right) dt = \int_0^{\pi/l}\left(\frac{1}{2l}\sum_{-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}\left(k\frac{\pi}{l}+t\right)\right|^2\right) dt$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{l}\int_{-l}^{l}|f(x)|^2 dx = \frac{1}{2l}\sum_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^{\pi/l}\left|\hat{f}\left(k\frac{\pi}{l}+t\right)\right|^2 dt\right)$$

$$= \Big/ k\frac{\pi}{l} + t = \xi \Big/ = \frac{1}{2l}\sum_{-\infty}^{\infty}\int_{k\pi/l}^{(k+1)\pi/l} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

$$= \frac{1}{2l}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

Detta visar Plancherels formel för kompaktstödda funktioner ∎

Vi noterar att beviset använder sig av satsen om monoton konvergens:

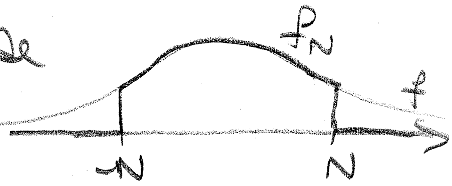
Faktum: Låt $\sum_k u_k(x)$ vara en funktionsserie med positiva termer $u_k(x) \ge 0$ på en mängd E.

Då är $\int_E \left(\sum_k u_k(x)\right) dx = \sum_k \left(\int_E u_k(x)\, dx\right)$.

(Se t.ex. s. 213 i Claesson–Böijers "Analys av funktioner av flera variabler.")

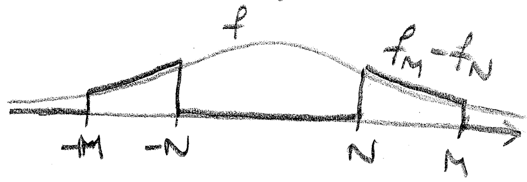
12:4 Bevis av Plancherels sats:

Låt $f \in L_2(\mathbb{R})$ och betrakta de trunkerade funktionerna $f_N \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$.



Enligt lemmat gäller att deras Fouriertransformer $\hat{f}_N(\xi) := \int_{-N}^{N} f(x) e^{-ix\xi} dx$ uppfyller

$$\frac{1}{2\pi} \|\hat{f}_M - \hat{f}_N\|_2^2 = \|f_M - f_N\|_2^2 \quad (**)$$



för alla $0 < N \leq M < \infty$ eftersom $f_M - f_N$ har kompakt stöd.

För att visa att $\hat{f}_N$ konvergerar mot någon funktion $\hat{f} \in L_2(\mathbb{R})$ i normen $\|\cdot\|_2$, räcker enligt FÖ6 att visa att $\{\hat{f}_N\}_{N=1}^{\infty}$ är en Cauchyföljd, eftersom $L_2(\mathbb{R})$ är ett Hilbertrum. Men detta följer direkt av (**) eftersom $\{f_N\}_{N=1}^{\infty}$ är en Cauchyföljd, då $f_N \to f$ i L_2-norm.

(1) Enligt lemmat är $\frac{1}{2\pi} \|\hat{f}_N\|_2^2 = \|f_N\|_2^2$.

Enligt omvända triangelolikheten gäller:

$$\left| \|\hat{f}_N\|_2 - \|\hat{f}\|_2 \right| \leq \|\hat{f}_N - \hat{f}\|_2 \to 0, \quad N \to \infty$$

$$\left| \|f_N\|_2 - \|f\|_2 \right| \leq \|f_N - f_N\|_2 \to 0, \quad N \to \infty$$

Låter vi därför $N \to \infty$ får vi $\frac{1}{2\pi} \|\hat{f}\|_2^2 = \|f\|_2^2$.

(2) Kom ihåg från FÖ11 att under lämpliga förutsättningar gäller om

$$g(\xi) := \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx \quad \text{att}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{+ix\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi} \hat{g}(-x).$$

För att visa (2), räcker det att visa att om $f \in L_2(\mathbb{R})$ och $g := \hat{f}$ är definierad enligt ovan, så är $f(x) = \frac{1}{2\pi} \hat{g}(-x)$ nästan överallt, där $\hat{g}$ också är definierad enligt ovan.

För att visa detta, låt $h \in L_2(\mathbb{R})$ vara en godtycklig funktion. Vi har:

$$\langle \hat{g}(-x), h(x)\rangle = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} g(\xi)e^{ix\xi}d\xi\right)\overline{h(x)}\,dx$$ 12:5

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} g(\xi)\overline{h(x)}e^{ix\xi}dx\,d\xi = \int_{\mathbb{R}} g(\xi)\overline{\left(\int_{\mathbb{R}} h(x)e^{-ix\xi}dx\right)}\,d\xi$$

$$= \langle g, \hat{h}\rangle.$$

Om nu $g = \hat{f}$, följer av Plancherels formel (1′) nedan att

$\langle \hat{g}(-x), h(x)\rangle = \langle \hat{f}, \hat{h}\rangle = 2\pi\langle f, h\rangle$, dvs

$\langle f(x) - \frac{1}{2\pi}\hat{g}(-x), h(x)\rangle = 0$, $\forall h \in L_2(\mathbb{R})$.

Väljer vi $h(x) = f(x) - \frac{1}{2\pi}\hat{g}(-x)$ får vi

$\| f(x) - \frac{1}{2\pi}\hat{g}(-x)\|_2^2 = 0$, dvs

$f(x) = \frac{1}{2\pi}\hat{g}(-x)$ nästan överallt ∎

Övn: Visa från (1) m.h.a. "polarisering" som i uppg. 302 att följande Plancherel formel gäller:

(1′) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\,d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx$

Notera att (1) är specialfallet $f = g$ i (1′).

Faltning av icke-periodiska funktioner:

Defn: Låt $f, g \in L_1(\mathbb{R})$. Faltningen av f och g är funktionen

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Helt analogt med FÖ2 visar man följande:

Sats: Antag $f, g, h \in L_1(\mathbb{R})$. Då gäller att

(1) $f*g \in L_1(\mathbb{R})$ och $\|f*g\|_1 \le \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$

(2) $f*g = g*f$

(3) $(f*g)*h = f*(g*h)$

(4) $\widehat{f*g}(\xi) = \hat{f}(\xi)\cdot\hat{g}(\xi)$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$.

Övn: Visa detta!

(12:6) Vi noterar slutligen ett samband mellan Plancherels formel och faltningar:

Enligt ovan gäller för $f, g \in L_2(\mathbb{R})$ att

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\,d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

Låt nu $h \in L_2(\mathbb{R})$ och betrakta faltningen $h*f$.

Enligt FÖ 11 gäller under lämpliga förutsättningar att

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{h*f}(\xi)e^{i0\cdot\xi}\,d\xi = (h*f)(0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(0-x)f(x)\,dx$$

Låt nu $h(x) := \overline{g(-x)}$. Då är

$$\hat{h}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty}\overline{g(-x)}e^{-ix\xi}\,dx = /x=-t/ = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\xi t}\,dt} = \overline{\hat{g}(\xi)}$$

Av (4) ovan ser vi därför att den punktvisa inversionsformeln för $h*f(0)$ är

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{h}(\xi)\hat{f}(\xi)\,d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} h(-x)f(x)\,dx$$

är precis Plancherels formel

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\hat{g}(\xi)}\hat{f}(\xi)\,d\xi = \int_{-\infty}^{\infty}\overline{g(x)}f(x)\,dx.$$

Läsanvisningar till måndag 11/12:

s. 73-75 : Studera specialfallet av Plancherels formel i Lemma 6.1.6.

Differential- och integralekvationer

Vi ska här använda Fouriertransformen för att lösa ekvationer. Följande räkneregler är grundläggande:

<u>Lemma</u>: Under lämpliga förutsättningar är

$$\widehat{u'}(\xi) = i\xi\,\hat{u}(\xi)$$
$$\widehat{h*u}(\xi) = \hat{h}(\xi)\cdot\hat{u}(\xi)$$

Observera "deriveringsoperatorn" $u(x) \longmapsto u'(x)$ och "faltningsoperatorn" $u(x) \longmapsto h*u(x)$ har en viktig gemensam egenskap: båda är s.k. Fouriermultiplikatorer. Detta innebär att båda verkar på $\hat{u}(\xi)$ genom multiplikation med en funktion:

(1) derivering innebär multiplikation med $i\xi$:
$$\hat{u}(\xi) \longmapsto i\xi\,\hat{u}(\xi)$$

(2) faltning med $h(x)$ innebär multiplikation med $\hat{h}(\xi)$:
$$\hat{u}(\xi) \longmapsto \hat{h}(\xi)\cdot\hat{u}(\xi).$$

Det enda som skiljer är att $i\xi \to \infty$, då $\xi \to \infty$ medan $\hat{h}(\xi) \to 0$, $\xi \to \infty$ enligt Riemann-Lebesgues lemma.

$\therefore$ Faltning kan ses som en negativ derivata.

<u>Ex</u>: Finn $u(x)$ sådan att $u'(x) + u(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, där $f(x)$ är en given funktion på $\mathbb{R}$.

Fouriertransformera:
$$i\xi\,\hat{u}(\xi) + \hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi)$$
$$\Rightarrow \hat{u}(\xi) = \frac{1}{1+i\xi}\hat{f}(\xi)$$

Vi behöver finna $h(x)$ sådan att $\hat{h}(\xi) = \frac{1}{1+i\xi}$.

Notera att $\frac{1}{1+i\xi} \in L_2(\mathbb{R})$, men ej $L_1(\mathbb{R})$.

Enligt FÖ 12 är $h(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N} \frac{e^{ix\xi}}{1+i\xi}\,d\xi$ och $h \in L_2(\mathbb{R})$.

Integralen kan beräknas med metoder från komplex analys (vilket vi avstår ifrån) och man får

$$h(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

(13:2) Vi kontrollerar:

$$\hat{h}(\xi) = \int_0^\infty e^{-x} e^{-i\xi x} dx = \left[\frac{e^{-(1+i\xi)x}}{-(1+i\xi)} \right]_0^\infty = \frac{1}{1+i\xi}$$

Enligt lemmat får vi:

$$\hat{u}(\xi) = F\{h(x) * f(x)\}$$

$$u(x) = h * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x-t) f(t) dt = \int_{-\infty}^{x} e^{-(x-t)} f(t) dt$$

Notera att lösningen $u(x)$ beror kausalt på f, dvs funktionsvärdet $u(x)$ beror bara på $f(t)$ för $t \leq x$.

Ex: Betrakta följande "typ 2 integralekvation"

$$u(x) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-t|} u(t) dt = f(x)$$

där $\lambda \in \mathbb{R}$ är en konstant. Notera att integralen är $e^{-|x|} * u(x)$. Fouriertransformera denna faltningsekvation:

$$\hat{u}(\xi) + \lambda F\{e^{-|x|}\} \cdot \hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi)$$

Här är

$$F\{e^{-|x|}\}(\xi) = \int_0^\infty e^{-x} e^{-ix\xi} dx + \underbrace{\int_{-\infty}^{0} e^{x} e^{-ix\xi} dx}_{= /x=-t/ = \int_0^\infty e^{-t} e^{it\xi} dt}$$

$$= 2 \int_0^\infty e^{-x} \cos(x\xi) dx$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\left\{ \int_0^\infty e^{-x+ix\xi} dx \right\} = 2\,\mathrm{Re} \frac{1}{1-i\xi} =$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\left\{ \frac{1+i\xi}{1+\xi^2} \right\} = \frac{2}{1+\xi^2}$$

$$\Rightarrow \left(1 + \lambda \frac{2}{1+\xi^2}\right) \hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi)$$

$$\Rightarrow \hat{u}(\xi) = \frac{1+\xi^2}{1+2\lambda+\xi^2} \hat{f}(\xi) = \left(1 - \frac{2\lambda}{1+2\lambda+\xi^2}\right) \hat{f}(\xi) \quad (*)$$

Fall 1: $1+2\lambda \leq 0$. Då har $1+2\lambda+\xi^2$ nollställen och $\frac{2\lambda}{1+2\lambda+\xi^2} \notin L_2(\mathbb{R})$ (visa!)

Fall 2: $1+2\lambda > 0$. Nu gäller att $\frac{2\lambda}{1+2\lambda+\xi^2} \in L_2(\mathbb{R})$.

Enligt räkneregler är:

$$F\{e^{-\sqrt{1+2\lambda}|x|}\} = \frac{1}{\sqrt{1+2\lambda}} \frac{2}{1+\left(\frac{\xi}{\sqrt{1+2\lambda}}\right)^2} = \frac{2\sqrt{1+2\lambda}}{1+2\lambda+\xi^2}$$

Inverstransformering av (*) ger lösningen

$$u(x) = f(x) - \frac{\lambda}{\sqrt{1+2\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{1+2\lambda}\,|x-t|} f(t)\,dt.$$

Notera likheterna i de tre exemplen: transformering ger en ekvation $\hat{p}(\xi)\cdot\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi)$

$\Rightarrow \hat{u}(\xi) = \frac{1}{\hat{p}(\xi)}\hat{f}(\xi) = \hat{h}(\xi)\hat{f}(\xi)$

Om $\hat{h} \in L_2(\mathbb{R})$ kan vi sedan inverstransformera:

$\Rightarrow u(x) = h(x) * f(x).$

Tyvärr är det vanligt att $\hat{h}(\xi)$ har singulariteter (dvs $\hat{p}(\xi)$ har nollställen) eller att $\hat{h}(\xi) \not\to 0$ då $\xi \to \infty$.

<u>Ex:</u> $u''(x) + u(x) = f(x)$

$\Rightarrow (-\xi^2+1)\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi)$

$\frac{1}{-\xi^2+1}$ har singulariteter i $\xi = \pm 1$.

<u>Ex:</u> En integralekvation av typ I:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-t|} u(t)\,dt = f(x)$$

$\Rightarrow \frac{2}{1+\xi^2}\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi) \quad \Rightarrow \hat{u}(\xi) = \frac{1}{2}(1+\xi^2)\hat{f}(\xi)$

$\frac{1}{2}(1+\xi^2) \to \infty,\ \xi \to \infty.$

För vissa ändata $f(x)$ kan vi dock lösa ekvationen:

I exempel 1: om $\hat{f}(1) = \hat{f}(-1) = 0$

I exempel 2: om $\hat{f}(\xi) \to 0$ snabbt då $\xi \to \pm\infty$.

<u>Partielle differentialekvationer:</u>

Analogt med FÖ 8-10 löser vi våg-, värmelednings- och Laplaces ekvation, nu för $-\infty < x < \infty$, m.h.a. Fouriertransformering.

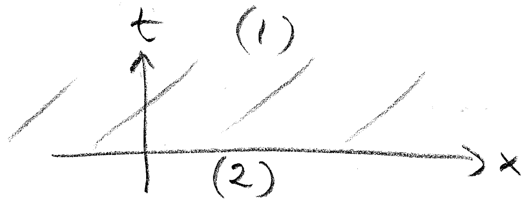
<u>Ex:</u> Finn $u(x,t)$ som löser vågekvationen:

(1) $u''_{tt} = c^2 u''_{xx}, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0.$

(2) med startvillkor

$u(x,0) = f(x)$

$u'_t(x,0) = g(x)$ $, x \in \mathbb{R}$



13:4 För varje fixt $t>0$, Fouriertransformerar vi:

$$\hat{u}(\xi,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\, e^{-ix\xi}\, dx.$$

$$(1) \iff \mathcal{F}\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t)\right\} = c^2 \mathcal{F}\{u''_{xx}(x,t)\}$$

$$\iff \frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{u}(\xi,t) = -c^2\xi^2 \hat{u}(\xi,t)$$

För fixt $\xi \in \mathbb{R}$ är detta en ordinär diff.ekv. (dvs enbart t-derivator förekommer). Den allmänna lösningen är

$$\hat{u}(\xi,t) = A(\xi)\cos(c\xi t) + B(\xi)\sin(c\xi t)$$

Vi kan sedan bestämma $A(\xi)$, $B(\xi)$ med (2):

$$\hat{f}(\xi) = \hat{u}(\xi,0) = A(\xi)$$

$$\hat{g}(\xi) = \mathcal{F}\{u'_t(x,0)\} = \frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(\xi,t)\Big|_{t=0} = c\xi B(\xi)$$

$$\Rightarrow \hat{u}(\xi,t) = \hat{f}(\xi)\cos(c\xi t) + \frac{1}{c}\hat{g}(\xi)\frac{\sin(c\xi t)}{\xi}$$

Enligt FC11 är

$$\mathcal{F}\{\chi_{(-1,1)}(x)\} = 2\frac{\sin\xi}{\xi} \Rightarrow \mathcal{F}\left\{\chi_{(-1,1)}\left(\frac{1}{ct}x\right)\right\} = 2ct\,\frac{\sin(ct\xi)}{ct\xi}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\{\chi_{(-ct,ct)}(x)\} = 2\frac{\sin(ct\xi)}{\xi}$$

$$\therefore \mathcal{F}\{\underbrace{g * \chi_{(-ct,ct)}(x)}_{=\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds}\} = \hat{g}(\xi)\cdot 2\frac{\sin(ct\xi)}{\xi}$$

För att inverstransformera den första termen noterar vi att

$$\hat{f}(\xi)\cos(c\xi t) = \frac{1}{2}\left(\hat{f}(\xi)e^{ict\xi} + \hat{f}(\xi)e^{-ict\xi}\right)$$

$$= \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right)\right\}$$

Vi får alltså d'Alemberts formel:

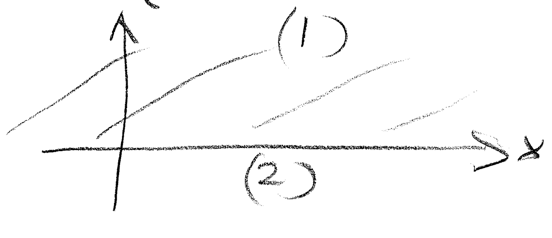
$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds.}$$

Ex: Finn $u(x,t)$ som löser värmeledningsekvationen:

(1) $u'_t = h u''_{xx}$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$

(2) med startvillkor

$u(x,0) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.



Transformering med avseende på x ger

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(\xi,t) = -h\xi^2\hat{u}(\xi,t)$$

Denna ODE har den allmänna lösningen

$$\hat{u}(\xi,t) = C(\xi)\, e^{-h\xi^2 t}$$

Enligt F 11 är $F\{e^{-ax^2}\} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\xi^2/4a}$

Välj a s.a. $\frac{1}{4a} = ht$, dvs $a = \frac{1}{4ht}$

$$\Rightarrow F\{e^{-x^2/4ht}\} = \sqrt{4\pi ht}\, e^{-h\xi^2 t}$$

Startvillkoret (2)

$$\Rightarrow \hat{f}(\xi) = \hat{u}(\xi,0) = C(\xi)$$

$$\therefore \hat{u}(\xi,t) = \hat{f}(\xi)\cdot F\left\{\frac{1}{\sqrt{4\pi ht}}\, e^{-x^2/4ht}\right\}$$

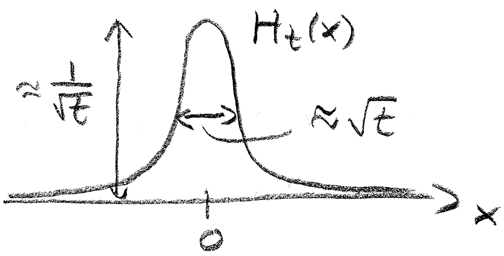
$$\Rightarrow u(x,t) = f(x) * \frac{1}{\sqrt{4\pi ht}}\, e^{-x^2/4ht}$$

$$\boxed{u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-s)\,\frac{1}{\sqrt{4\pi ht}}\, e^{-\frac{s^2}{4ht}}\, ds}$$

Defn: För $h=1$ kallas

$$H_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-x^2/4t}$$

värmekärnan på $\mathbb{R}$.



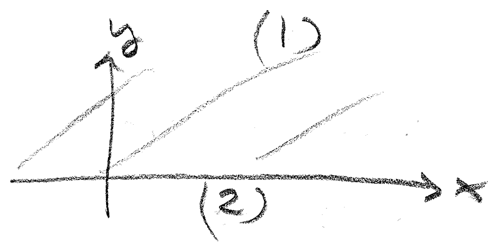
Övn.: Visa att $H_t(x)$ är en approximativ enhet då $t \to 0^+$.

Ex: Finn $u(x,y)$ som löser Laplaces ekvation

(1) $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$, $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$

(2) med randvillkor

$u(x,0) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.



Analogt med ovan transformerar vi m.a.p. x:

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(u''_{xx}(x,y) + u''_{yy}(x,y)\right) e^{-ix\xi}\, dx$$

$$\Rightarrow 0 = -\xi^2\hat{u}(\xi,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\hat{u}(\xi,y)$$

Denna ODE i variabeln y har allmän lösning

$$\hat{u}(\xi,y) = A(\xi)\, e^{-|\xi| y} + B(\xi)\, e^{|\xi| y}$$

Vi söker den lösning som är begränsad då $y \to +\infty$.

(13:6) $\Rightarrow B(\xi) = 0$

Randvillkoret (2) $\Rightarrow$

$\hat{f}(\xi) = \hat{u}(\xi, 0) = A(\xi)$

$\therefore \quad \hat{u}(\xi, y) = \hat{f}(\xi)\, e^{-|\xi| y}$

På s. 13:2 såg vi att $F\{e^{-|x|}\} = \dfrac{2}{1+\xi^2}$

Fouriers inversionsformel $\Rightarrow F\left\{\dfrac{2}{1+x^2}\right\} = 2\pi e^{-|\xi|}$

$\Rightarrow F\left\{\dfrac{2}{1+(x/y)^2}\right\} = 2\pi y\, e^{-|y\xi|}$

$\therefore \quad \hat{u}(\xi, y) = \hat{f}(\xi) \cdot F\left\{\dfrac{1}{\pi}\dfrac{y}{y^2+x^2}\right\}$

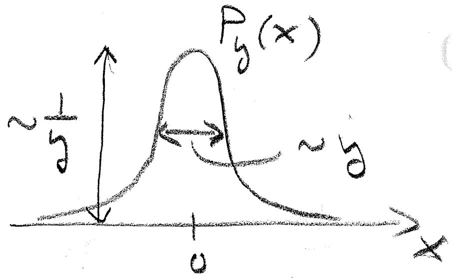
$\Rightarrow u(x,y) = f(x) * \dfrac{1}{\pi}\dfrac{y}{y^2+x^2}$

$$\boxed{u(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-s)\, \frac{1}{\pi}\, \frac{y}{y^2+s^2}\, ds}$$

<u>Defn</u>: Funktionen

$P_y(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{y}{y^2+x^2}$

kallas för <u>Poissonkärnan på $\mathbb{R}$</u>.



<u>Övn</u>: Visa att Poissonkärnan $P_y(x)$ är en approximativ enhet då $y \to 0^+$

<u>Läsanvisningar till onsdag 13/12</u>

s. 76 – 78 ⎫
Bilaga B ⎭ kontrollera räkneregler

Bilaga B delas ut som formelblad på tentamen.