Areor och volymer, vinklar och vrår

Andreas Axelsson

Vi repeterar här de olika produkter av vektorer i planet och i rummet som man t ex kan använda för att beräkna vinklar, areor och volymer.

1. Det tvådimensionella planet

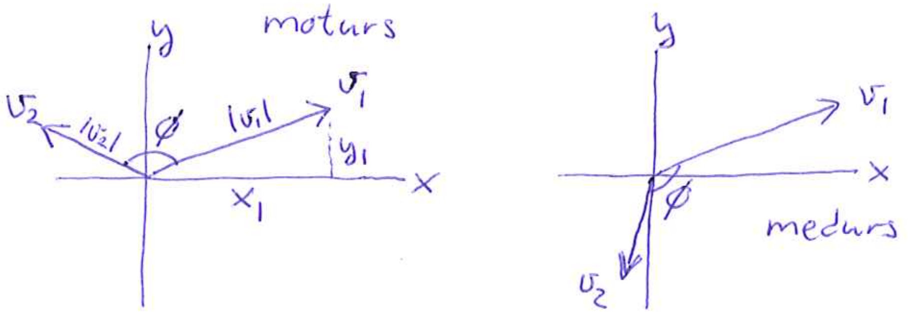
I planet, med x-axel pekandes åt höger och y-axel pekandes uppåt, betraktar vi två vektorer

$$v_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad v_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Enligt Pytagoras sats beräknas längden $|v_1|$ av vektorn v_1 med formeln

$$|v_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2},$$

och liknande för $|v_2|$. (Observera att $|v_1|$ betecknar längden av *vektorn* v_1, medan $|x_1|$ betecknar absolutbeloppet av talet/skalären x_1, dvs eventuellt minustecken borttaget.) Hur vektorerna är riktade i förhållande till varandra bekrivs av vinkeln ϕ mellan vektorerna. Tillåtna värden på ϕ är $0 \leq \phi \leq \pi$. För att fullständigt beskriva hur vektorerna är riktade relativt varandra måste vi ange om v_2 ligger moturs eller medurs sett från v_1.



Figur 1. Vinkel mellan plana vektorer.

Skalärprodukten $v_1 \cdot v_2$ är som namnet anger en skalär, dvs ett tal (inte en vektor). Kärt barn har många namn: *inre produkt* är en synonym för skalärprodukt, och denna skrivs ibland som (v_1, v_2), $\langle v_1, v_2 \rangle$ eller $\langle v_1 | v_2 \rangle$. Skalärprodukten $v_1 \cdot v_2$ kan beräknas på två ekvivalenta sätt. Uttryckt i koordinater har vi

$$v_1 \cdot v_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

Uttryckt i längderna $|v_1|, |v_2|$ och vinkeln ϕ har vi

$$v_1 \cdot v_2 = |v_1|\,|v_2| \cos \phi.$$

Kombinerar vi dessa två formler får vi följande formel för att beräkna vinkeln ϕ utfrån vektorernas koordinater.

$$\phi = \arccos \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

Eftersom $0 \leq \arccos t < \pi/2$ då $1 \geq t > 0$, $\arccos 0 = \pi/2$, och $\pi/2 < \arccos t \leq \pi$ då $0 > t \geq -1$, får vi att

$$\begin{cases} \phi \text{ är spetsig då } v_1 \cdot v_2 > 0, \\ \phi \text{ är rät då } v_1 \cdot v_2 = 0, \\ \phi \text{ är trubbig då } v_1 \cdot v_2 < 0. \end{cases}$$

Då $\phi = \pi/2$ sägs v_1 och v_2 vara *ortogonala*.

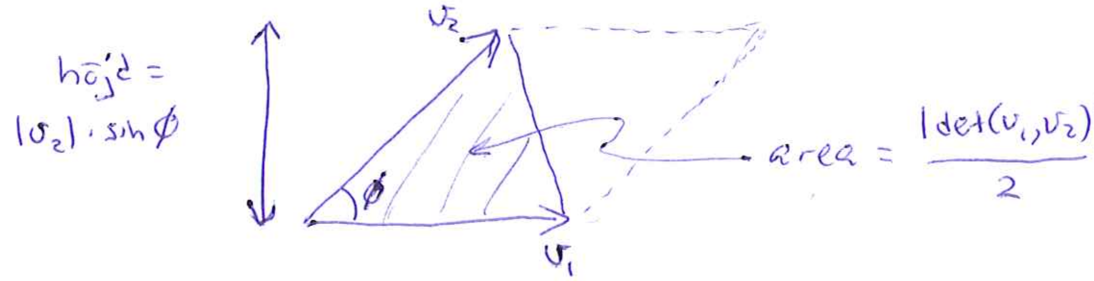
Den andra produkten mellan plana vektorer är *determinanten* $\det(v_1, v_2)$, vilken också kan beräknas på två ekvivalenta sätt. Uttryckt i koordinater har vi

$$\det(v_1, v_2) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - y_1 x_2.$$

Uttryckt i längderna $|v_1|, |v_2|$ och vinkeln ϕ har vi å andra sidan

$$\det(v_1, v_2) = \pm |v_1|\,|v_2| \sin\phi.$$

Tecknet här är $+$ om v_2 ligger moturs från v_1 (positiv orientering) och annars $-$. Figuren



FIGUR 2. Area av parallellogram och triangel.

illustrerar det faktum att

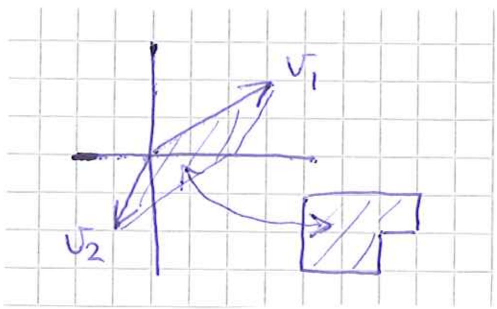
$$|\det(v_1, v_2)| = |v_1|\,|v_2| \sin\phi = \text{arean av parallellogrammet med kantvektorer } v_1, v_2.$$

Från detta följer att triangeln med kantvektorer v_1 och v_2 har area $|\det(v_1, v_2)|/2$. För determinanten gäller att

$$\begin{cases} \phi \text{ är moturs då } \det(v_1, v_2) > 0, \\ \phi = 0 \text{ eller } \pi \text{ då } \det(v_1, v_2) = 0, \\ \phi \text{ är medurs då } \det(v_1, v_2) < 0. \end{cases}$$

Då $\phi = 0$ säger vi att v_1 och v_2 är *lika riktade*, medan v_1 och v_2 sägs vara *motsatt riktade* då $\phi = \pi$. I båda fallen sägs v_1 och v_2 vara *parallella*.

Exempel 1.1. Låt $v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Skalärprodukten blir $v_1 \cdot v_2 = -3 - 2 = -5$



FIGUR 3.

så vinkeln är trubbig, vilket överrensstämmer med figuren. Vinkeln beräknas till

$$\phi = \arccos \frac{-5}{\sqrt{10}\sqrt{5}} = \arccos \frac{-1}{\sqrt{2}} = 3\pi/4 = 135°.$$

Determinanten blir $\det(v_1, v_2) = -6 + 1 = -5$. Alltså ligger v_2 medurs sett från v_1 och parallellogrammet med kantvektorer v_1, v_2 har area 5. Detta verkar stämma med figuren.

En formel som väl illustrerar hur skalärprodukten och determinanten för plana vektorer förhåller sig till varandra, är *Lagranges formel* som säger att

$$\big(v_1 \cdot v_2\big)^2 + \big(\det(v_1, v_2)\big)^2 = |v_1|^2|v_2|^2.$$

Detta samband är uppenbart utifrån längd/vinkel formlerna för skalär- och determinantprodukterna, för

$$\big(|v_1||v_2|\cos\phi\big)^2 + \big(\pm|v_1||v_2|\sin\phi\big)^2 = |v_1|^2|v_2|^2$$

följer av trigonometriska ettan. Å andra sidan kan vi även verifiera Lagranges formel med hjälp av koordinatformlerna för skalär- och determinantprodukterna. Vi räknar ut:

$$\begin{aligned}
&(x_1x_2 + y_1y_2)^2 + (x_1y_2 - y_1x_2)^2 \\
&\quad = x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2 - 2x_1y_2y_1x_2 \\
&\qquad\qquad = x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2 = (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2).
\end{aligned}$$

Du ska inte känna dig illa till mods om du inte kommer ihåg Lagranges formel, för denna undervisas tyvärr vanligtvis inte i grundläggande analys och linjär algebrakurser. Endast ett enkelt följdresultat, *Cauchy–Schwarz olikhet*, brukar tas upp. Denna säger att

$$|v_1 \cdot v_2| \leq |v_1||v_2|.$$

(Absolutbelopp i VL, längder i HL!) Eftersom $(\det(v_1, v_2))^2 \geq 0$ i Langranges formel är detta klart. Dessutom ser vi att likhet gäller i Cauchy–Schwarz om och endast om $\det(v_1, v_2) = 0$, det vill säga om v_1 och v_1 är parallella.

Exempel 1.2. Fortsättning på Exempel 1.1. Vi kontrollerar Langranges formel:

$$\big(v_1 \cdot v_2\big)^2 + \big(\det(v_1, v_2)\big)^2(-5)^2 + (-5)^2 = 50 = \sqrt{10}\sqrt{5} = |v_1|^2|v_2|^2.$$

Notera att vektorerna är halvvägs mellan att vara parallella (motsatt riktade) och ortogonala. Därför är de båda termerna i Lagranges formel lika stora.

Vi avslutar denna diskussion om plana vektorer med att notera följande skillnader mellan skalärprodukten och determinanten. För parallella vektorer är $|v_1 \cdot v_2|$ maximalt stor medan $\det(v_1, v_2) = 0$. Å andra sidan gäller för ortogonala vektorer att $v_1 \cdot v_2 = 0$ medan $|\det(v_1, v_2)|$ är maximalt stor. Ju mer parallella vektorerna är, desto större är skalärprodukten i förhållande till determinanten, eller omvänt, ju mer ortogonala vektorerna är, desto större är determinanten i förhållande till skalärprodukten. En annan skillnad är att skalärprodukten är symmetrisk $v_2 \cdot v_1 = v_1 \cdot v_2$, medan determinanten är antisymmetrisk $\det(v_2, v_1) = -\det(v_1, v_2)$.

2. Det tredimensionella rummet

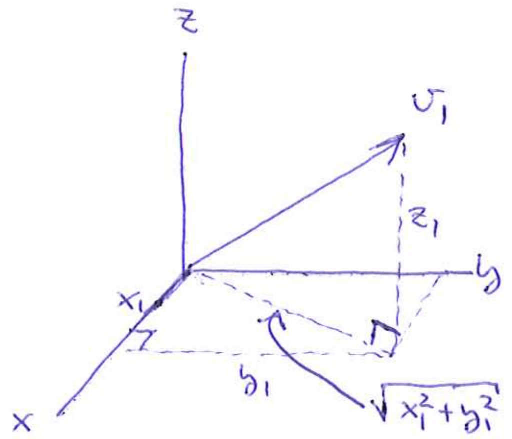
I rummet, med x-axel pekandes mot oss, y-axel pekandes åt höger och z-axeln pekandes uppåt, betraktar vi tre vektorer

$$v_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}, \qquad v_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \qquad \text{och} \qquad v_3 = \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix}.$$

Genom att använda plana Pytagoras sats på var och en av de två rätvinkliga trianglarna i figuren, får vi den tredimensionella Pytagoras sats

$$|v_1| = \sqrt{\Big(\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\Big)^2 + z_1^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

för beräkning av längden av vektorn v_1, och liknande för de två andra tredimensionella vektorerna v_2 och v_3. Precis som för plana vektorer anger vi hur två vektorer v_1 och v_2



FIGUR 4. Pytagoras i rummet.

är riktade i förhållande till varandra med vinkeln ϕ, där $0 \leq \phi \leq \pi$, mellan vektorerna. Formlerna för skalärprodukt och vinkel i rummet ser ut så här:

$$v_1 \cdot v_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2,$$
$$v_1 \cdot v_2 = |v_1|\,|v_2| \cos\phi,$$
$$\phi = \arccos \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

För determinanten är skillnaderna, jämfört med plana vektorer, större. Den 2/2 determinant som användes i planet för areaberäkning motsvaras i rummet av en slags rektangulär determinant (tre rader med koordinater, men fortfarande två kolumner) som benämns *vektorprodukt*, eller synonymt *kryssprodukt*. Uttryckt i koordinater beräknas den

$$v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1z_2 - z_1y_2 \\ -(x_1z_2 - z_1x_2) \\ x_1y_2 - y_1x_2 \end{bmatrix}.$$

Som namnet vektorprodukt anger, så är $v_1 \times v_2$ en vektor (och inte en skalär/ett tal), och till exempel x-koordinaten i denna vektor beräknas som determinanten av matrisen med vektorernas koordinater som kolumner, med x-koordinaterna borttagna. På samma sätt beräknas y och z-koordinaterna, med den skillnaden att y-koordinaten skall negeras.

Denna vektor $v_1 \times v_2$ är rummets motsvarighet till planets $\det(v_1, v_2)$, för ser vi två plana vektorer v_1 och v_2 som tredimensionella vektorer

$$v_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{med } z\text{-koordinat } 0, \text{så följer att } v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}.$$

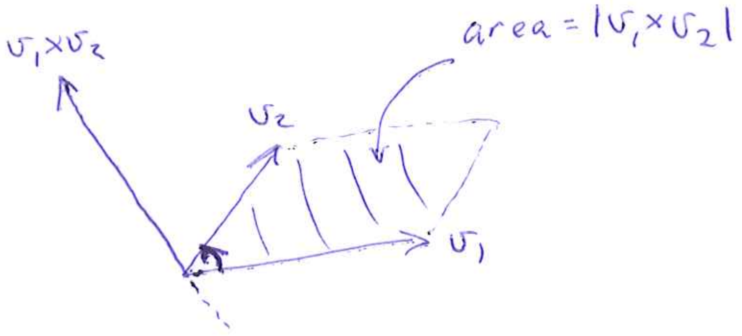
Precis som för determinanten i planet, gäller för $v_1 \times v_2$ att

$$|v_1 \times v_2| = |v_1||v_2| \sin\phi = \text{arean av parallellogrammet med kantvektorer } v_1, v_2.$$

Notera att $|v_1 \times v_2|$ här betecknar längden av vektorn $v_1 \times v_2$ (och inte som i planet, där $|\det(v_1, v_2)|$ var talet $\det(v_1, v_2)$ utan eventuellt minustecken). Att längden av vektorn $v_1 \times v_2$ är en area kan förefalla märkligt, och det med all rätta. Detta är i själva verket en brist i linjära algebran som lärs ut i den grundläggande matematiken. För att få den fullständiga bilden ska man ersätta vektorprodukten med den så kallade yttre produkten, som används i den högre matematiken.

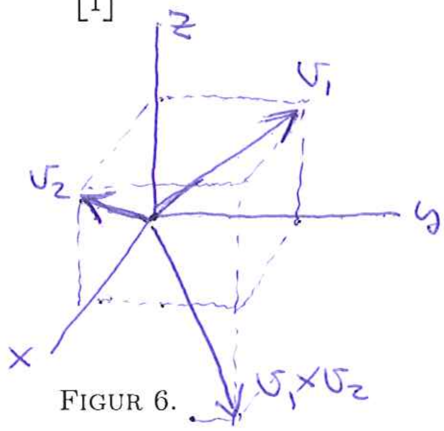
I rummet är begreppen med- och moturs inte längre meningsfulla utan närmare förklaring, eftersom detta beror på från vilken riktning i rummet som vi betraktar vektorerna.

Vektorn $v_1 \times v_2$ kommer vara riktad längd den linje i rummet som är vinkelrät mot både v_1 och v_2. Längden ges av areaformeln $|v_1 \times v_2| = |v_1||v_2| \sin\phi$, och riktningen är sådan att, sett från spetsen på $v_1 \times v_2$, ska v_2 ligga moturs från v_1. (Man säger då att $v_1, v_2, v_1 \times v_2$ utgör ett *högersystem* av vektorer.)



FIGUR 5. Vektorprodukten.

Exempel 2.1. Låt $v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Skalärprodukten är $v_1 \cdot v_2 = 0 + 0 + 1 = 1$,



FIGUR 6.

så vinkeln mellan vektorerna är spetsig. Vinkeln beräknas till

$$\phi = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \arccos \frac{1}{2} = \pi/3 = 60^\circ.$$

Vektorprodukten är

$$v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

så parallellogrammet med kantvektorer v_1 och v_2 har arean $|v_1 \times v_2| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$. Notera i figuren att v_2 ligger moturs från v_1, sett från $v_1 \times v_2$.

I det tredimensionella rummet har vi förutom vinklar, längder och areor, även intresse av att beräkna volymer. För att beräkna volymen av parallellepipeden med kantvektorer v_1, v_2 och v_3 använder vi 3/3 determinanten

$$\det(v_1, v_2, v_3) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - (z_1y_2x_3 + z_2y_3x_1 + z_3y_1x_2).$$

Som nämnt gäller att

$$|\det(v_1, v_2, v_3)| = \text{volymen av parallellepipeden med kantvektorer } v_1, v_2, v_3.$$

(Absolutbelopp i VL!) Tecknet på $\det(v_1, v_2, v_3)$ är $+$ om v_1, v_2, v_3 bildar ett högersystem, annars $-$.

Formel för beräkning av 3/3-determinanter brukar memoreras som *Sarrus regel*:

$$\begin{array}{c} - \quad - \quad - \\ \left|\begin{array}{ccc|cc} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_1 & z_2 \end{array}\right. \\ + \quad + \quad + \end{array}$$

Notera att denna/analog formel endast är giltig för 3/3-determinanter. Vi har sett att 2/2-determinanter har $2 = 2!$ termer och 3/3-determinanter har $6 = 3!$ termer. Determinanten av en 4/4-matris beräknas med $24 = 4!$ termer, och är en mer komplicerad historia än Sarrus.

Även räkneschemat för vektorprodukten av två tredimensionella vektorer kan memoreras med Sarrus regel. Betecknas basvektorerna längs x, y, z-koordinataxlarna med $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$, har vi att

$$v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} \hat{x} & x_1 & x_2 \\ \hat{y} & y_1 & y_2 \\ \hat{z} & z_1 & z_2 \end{vmatrix} = \hat{x}y_1z_2 + x_1y_2\hat{z} + x_2\hat{y}z_1 - (\hat{z}y_1x_2 + z_1y_2\hat{x} + z_2\hat{y}x_1).$$

Kontrollera att denna formel stämmer överrens med tidigare formel!

För ett rätblock (parallellepiped med alla vinklar räta) kommer vi ihåg att volymen är lika med arean av basytan gånger längden av höjden. Detta generaliseras till formeln

$$\det(v_1, v_2, v_3) = (v_1 \times v_2) \cdot v_3$$

för godtyckliga parallellepipeder. Här ser vi $|v_1 \times v_2|$ som arean av basytan (parallellogrammet med kantvektorer v_1 och v_2). Kontrollera att

$$(v_1 \times v_2) \cdot v_3 = \begin{bmatrix} y_1z_2 - z_1y_2 \\ -(x_1z_2 - z_1x_2) \\ x_1y_2 - y_1x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

ger formeln för determinanten ovan.

Exempel 2.2. Fortsättning på Exempel 2.1. Med v_1 och v_2 som i det exemplet, och $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ får vi

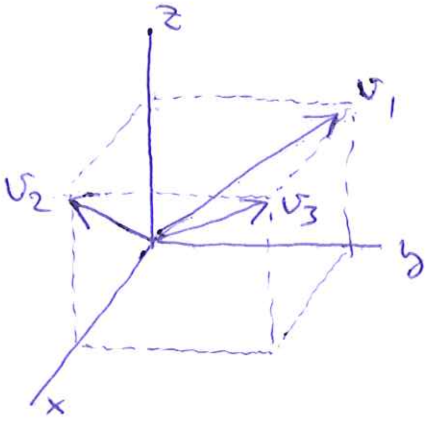
$$\det(v_1, v_2, v_3) = 0 + 1 + 1 - (0 + 0 + 1) = 1,$$

$$(v_1 \times v_2) \cdot v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 + 1 - 1 = 1.$$

Volymen av parallellepipeden med dessa kantvektorer är således 1, och v_1, v_2, v_3 utgör ett högersystem. Pytagoras ger kantvektorernas längder $|v_1| = \sqrt{2}$, $|v_2| = \sqrt{2}$ och $|v_3| = \sqrt{3}$. Volymen av ett rätblock med dessa sidlängder hade därför varit $\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \approx 2 \cdot 1.73 = 3.46$, vilket är betydligt större än 1. Detta på grund av att parallellepipeden är avsevärt "skevt", som ses i figuren. (Kuben i figuren är bara där som stöd för det tredimensionella åskådliggörandet. Hur ser parallellepipeden ut?)

Även i rummet gäller en Lagranges formel, som här säger att

$$(v_1 \cdot v_2)^2 + |v_1 \times v_2|^2 = |v_1|^2 |v_2|^2.$$



FIGUR 7.

Som i planet är denna en direkt följd av trigonemtriska ettan. Man kan även visa den utifrån koordinatuttrycken för skalär- och vektorprodukten:

$$
\begin{aligned}
(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)^2 + \Big((y_1z_2 - z_1y_2)^2 + (x_1z_2 - z_1x_2)^2 + (x_1y_2 - y_1x_2)^2\Big) \\
\stackrel{?}{=} (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2).
\end{aligned}
$$

Det lämnas som övning att verifiera detta.

Analogt med situationen för plana vektorer, gäller i rummet att $|v_1 \cdot v_2|$ är maximalt stor och $v_1 \times v_2 = 0$ för parallella vektorer. Omvänt är $v_1 \cdot v_2 = 0$ och $|v_1 \times v_2|$ maximalt stor för ortogonala vektorer. Dessutom är skalärprodukten symmetrisk, $v_2 \cdot v_1 = v_1 \cdot v_2$, medan vektorprodukten är antisymmetrisk, $v_2 \times v_1 = -v_1 \times v_2$.