Konsten att uppskatta absolutbelopp

Andreas Rosén

1. På talaxeln

Vi ska här friska upp minnet lite angående absolutbelopp och hur sådana används för att göra uppskattningar. Kom ihåg att absolutbeloppet $|x|$ av ett reellt tal $x \in \mathbf{R}$ (dvs $-\infty < x < \infty$) är

$$|x| := \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Alltså har vi till exempel $|4| = 4$ men $|-3| = -(-3) = 3$. Notera att minustecknet i $-x$ inte nödvändigtvis innebär att $-x$ är negativt, utan detta minustecken betyder "*byte* av tecken". I fallet ovan är ju redan $x = -3$ negativt, vilket får till följd att byte av tecken, $-x = -(-3) = 3$, leder till ett positivt tal.

Viktigt att förstå om abolutbeloppet är följande tolkning:

Abolutbeloppet $|x|$ är lika med *avståndet* mellan 0 och x på talaxeln.

För att se detta, använder vi standardmetoden vid räkning med aboslutbelopp: falluppdelning.

(1) Om $x > 0$ ligger x till höger om 0, och avståndet ifråga blir $x - 0 = x = |x|$.
(2) Om $x < 0$ ligger x till vänster om 0, och avståndet ifråga blir $0 - x = -x = |x|$.

Fallet $x = 0$ behöver vi väl inte diskutera...

Låt oss nu se hur vi räknar med absolutbelopp. För produkter och kvoter är det enkelt:

$$|xy| = |x| \cdot |y|, \qquad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

Låt oss övertyga oss om detta genom ett antal exempel:

$$VL = |(-2)3| = |-6| = 6, \qquad HL = |-2| \cdot |3| = 2 \cdot 3 = 6 = VL,$$
$$VL = |(-7)(-4)| = |28| = 28, \qquad HL = |-7| \cdot |-4| = 7 \cdot 4 = 28 = VL.$$

Vi ser att dessa räkneregler uppenbarligen är sanna eftersom det inte har någon betydelse om vi tar bort eventuella minustecken före eller efter vi beräknar en produkt eller kvot.

Svårare blir det med summor och differenser. Vi har INTE att $|x + y| = |x| + |y|$ i allmänhet. Till exempel är

$$|7 + (-3)| = |4| = 4 \quad \text{medan} \quad |7| + |-3| = 7 + 3 = 10.$$

Om vi vill ha en formel som inte förutsätter att vi känner till tecknen på x och y, har vi följande.

Sats 1.1. *Triangelolikheten gäller:*

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Även den omvända triangelolikheten gäller:

$$|x + y| \geq |x| - |y|.$$

Bevis. För att visa att detta är sant så kan vi anta att $|x| \geq |y|$. Varför? Jo, i triangelolikheten kan vi annars bara byta roll på x och y, och den omvända triangelolikheten är uppenbart sann då $|y| \geq |x|$ eftersom $HL \leq 0$ då.

Så antag att $|x| \geq |y|$, det vill säga att y ligger närmare 0 än x gör. Om vi utgår ifrån x och lägger till y, så kommer talet $x + y$ antingen ligga på avståndet $|x| + |y|$ eller $|x| - |y|$ från 0 (eftersom vi går sträckan $|y|$ åt höger eller vänster). Rita talaxeln och kontrollera! (Två fall: $x > 0$ och $x < 0$.)

Så, vi har till och med visat att

$$|x+y| = |x|+|y| \quad \text{eller} \quad |x|-|y|, \qquad \text{om } |x| \geq |y|.$$

Speciellt följer triangelolikheterna

$$|x|-|y| \leq |x+y| \leq |x|+|y|.$$

□

Triangelolikheterna gäller för alla x och y. Speciellt kan vi i formlerna ersätta y med $-y$, och får då, eftersom $|-y| = |y|$ följande alternativa form på triangelolikheterna:

$$|x|-|y| \leq |x-y| \leq |x|+|y|.$$

I den omvända triangelolikheten kan vi också ersätta x med y och y med x, och får då

$$|x+y| \geq |y|-|x|.$$

Diverse varianter av triangelolikheterna finns alltså, men vi ska fokusera på olikheterna i satsen:

$$|x|-|y| \leq |x+y| \leq |x|+|y|.$$

Det sätt som dessa olikheter vanligtvis används för uppskattningar är följande. Antag att y är "litet" i förhållande till x. Till exempel låt $x = 10$ och antag att y är ett litet "fel": det enda vi känner till om y är att $|y| \leq 0.2$. Hur stort är då $x+y$? Jo, enligt triangelolikheterna gäller

$$9.8 = 10 - 0.2 \leq |10+y| \leq 10+0.2 = 10.2.$$

Exempel 1.2. Antag att x och y är två tal där vi vet att $|x| \leq 0.3$ och $|y| \leq 0.7$. Vad kan då sägas om beloppet av

$$\frac{4+x}{5+y}?$$

Jo, enligt ovan är

$$\left|\frac{4+x}{5+y}\right| = \frac{|4+x|}{|5+y|} \leq \frac{4+|x|}{5-|y|} \leq \frac{4.3}{4.3} = 1.$$

Notera att vi först använde räkneregeln för kvoter, sedan triangelolikheterna för summor. I täljaren ville vi ha något större, därför använde vi triangelolikheten, medan i nämnaren ville vi ha något mindre (för att få hela kvoten större), därför använde vi omvända triangelolikheten.

2. I planet och i rummet

Triangelolikheterna ovan för tal x, y på talaxeln lämnar två frågor öppna:

Varifrån kommer namnet "triangelolikhet" ?

Kan vi inte vara mer precis i uppskattningen av $|x+y|$? Trots allt hade vi ju alltid likhet antingen i triangelolikheten eller den omvända triangelolikheten, då $|x| \geq |y|$.

För att förklara detta, ska vi nu istället betrakta fallet då x och y är (två- eller tredimensionella) vektorer istället för tal. För sådana betyder $|x|$ "längd" istället för absolutbelopp. Tänker vi oss vektorn x fästad i origo, får vi analogt med situationen för talaxeln:

Längden $|x|$ är lika med *avståndet* mellan origo och x i planet / rummet

Då avstånd / längder beräknas med Pytagoras sats, har vi följande formler.

$$|x| = \sqrt{x^2}, \qquad x \in \mathbf{R},$$

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \qquad x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2,$$

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \qquad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3.$$

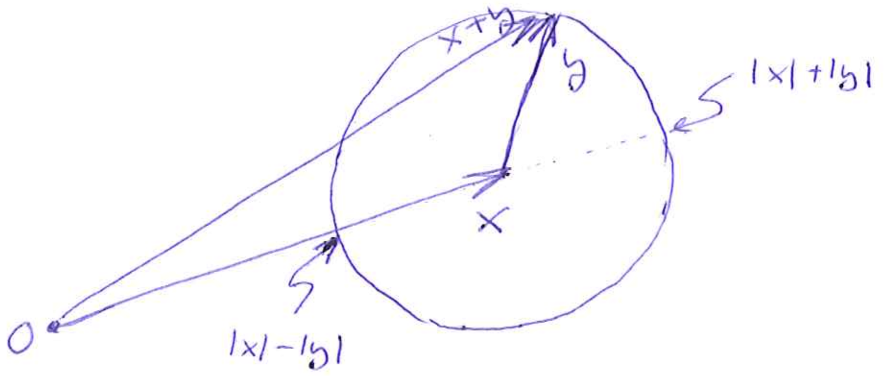
Triangelolikheterna

$$|x| - |y| \leq |x+y| \leq |x| + |y|$$

gäller för vektorer x och y, såväl som för tal. Låt oss betrakta fallet då $x = (x_1, x_2)$ och $y = (y_1, y_2)$ är plana vektorer. För att förstå ursprunget till terminologin "triangelolikheten" noterar vi att

$$x, \quad y, \quad x+y$$

är kantvektorer i en triangel som i figuren.



FIGUR 1.

Vi tänker oss nu vektorn x som fix och fästad i origo $0 = (0,0)$. För att visa triangelolikheterna kan vi som tidigare anta att $|y| \leq |x|$. Variera nu riktningen (men ej längden $|y|$) på vektorn y runt cirkeln med centrum i spetsen på x och med radie $|y|$. De olika möjliga summorna $x+y$ kan ha olika längd. Som störst ses $|x+y|$ vara då y är lika riktad med x, medan $|x+y|$ blir som minst då y är motsatt riktad x. Dessutom ser vi (till skillnad från på talaxeln!) att alla värden på $|x+y|$ däremellan är möjliga. Vi har visat:

$$|x+y| \in [\,|x| - |y|, |x| - |y|\,], \qquad \text{då } |y| \leq |x|,$$

och alla värden i detta intervall är möjliga.

Vi avrundar med att svara på de två ställda frågorna. Namnet "triangelolikheten" härrör från triangeln ovan som illustrerar den geometriska betydelsen av triangelolikheten i planet och rummet. Triangelolikheterna för $|x+y|$ kan som vi sett skärpas till likhet med $|x|+|y|$, $|x|-|y|$ eller $|y|-|x|$ på talxeln. I planet och rummet är dock uppskattningen

$$\Big||x| - |y|\Big| \leq |x+y| \leq |x| + |y|$$

den bästa möjliga. (I vänsterledet här finns både längder av vektorer och absolutbelopp av tal, eller hur?)