Konsten att lösa de enklaste differentialekvationerna

Andreas Axelsson

1. Separabla differentialekvationer

Problemet vi vill lösa här är att finna de funktioner $y(x)$ sådana att

$$a(y(x))y'(x) = b(x), \qquad \text{för alla } x.$$

Funktionerna $a(y)$ och $b(x)$ antas givna.

Metoden för att lösa sådana differentialekvationer är att använda *kedjeregeln baklänges.* Kom ihåg kedjeregeln för derivator:

$$\big(f(g(x))\big)' = g'(x)f'(g(x)).$$

Vanligtvis använder man denna formel för att beräkna derivatan av en produkt, det vill säga man börjar med VL och skriver om detta som HL. Till exempel

$$\frac{d}{dx}e^{-x^2} = (-2x)e^{-x^2}.$$

Å andra sidan är den användbar baklänges också:

$$\int xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int(-2x)e^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}.$$

I ord: faktorn x i integranden inses vara nästa den inre derivatan av e^{-x^2}. Med kedjeregeln-baklänges "sväljs" denna vid integrationen.

Speciellt användbar är kedjeregeln-baklänges för att lösa separabla differentialekvationer. Låt $f(x) = A(x)$ vara en primitiv funktion till den givna funktionen $a(x)$ och låt $g(x) = y(x)$. Då är VL i differentialekvationen

$$a(y(x))y'(x) = f'(g(x))g'(x) = (f(g(x)))' = (A(y(x)))'.$$

Differentialekvationen kan alltså lösas

$$\begin{aligned}(A(y(x)))' &= b(x),\\ A(y(x)) &= B(x),\\ y(x) &= A^{-1}(B(x)),\end{aligned}$$

där $B(x)$ är en primitiv funktion till $b(x)$ och $A^{-1}(y)$ är den inversa funktionen till $A(y)$. (Ekvivalent: i sista steget löses y ut ur ekvationen.)

Exempel 1.1. Lös differentialekvationen $x^4y^4 = y'$. Vi skriver om den som en separabel differentialekvation:

$$y^{-4}y' = x^4.$$

(Variablerna har separerats: alla y i VL och alla x i HL.) De givna funktionerna är $a(y) = y^{-4}$ och $b(x) = x^4$. Metoden ovan ger lösningsgången

$$\begin{aligned}A(y) &= -y^{-3}/3,\\ (-y^{-3}/3)' &= x^4,\\ -y^{-3}/3 &= x^5/5 + C,\\ y^{-3} &= -\tfrac{3}{5}x^5 + D,\\ y &= 1/\sqrt[3]{D - 3x^5/5},\end{aligned}$$

där C och $D = -3C$ är integrationskonstanter.

Givetvis avslutar vi med att KONTROLLERA SVARET: kedjeregeln ger $y' = (-3x^4)(-1/3(D-3x^5/5)^{-4/3}) = x^4y^4$.

2. Linjära differentialekvationer

Problemet vi vill lösa här är att finna de funktioner $y(x)$ sådana att

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x), \qquad \text{för alla } x.$$

Funktionerna $a(x)$ och $b(x)$ antas givna.

Metoden för att lösa sådana differentialekvationer är att använda *produktregeln baklänges*. Kom ihåg produktregeln för derivator:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Vanligtvis använder man denna formel för att beräkna derivatan av en produkt, det vill säga man börjar med VL och skriver om detta som HL. Till exempel

$$\frac{d}{dx}(e^{2x}\cos(3x)) = (2e^{2x})\cos(3x) + e^{2x}(-3\sin(3x)).$$

Å andra sidan, för att lösa differentialekvationen tänker vi så här. Vi försöker se VL i denna som HL i produktregeln, och försöker skriva om den som VL i produktregeln, som sedan enkelt kan integreras. Håll med om att uttrycken

$$y'(x) + a(x)y(x) \qquad \text{och} \qquad f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

påminner om varandra. Tricket för att identifiera dom helt är att

(1) Hitta en primitiv funktion $A(x)$ till den givna funktionen $a(x)$.
(2) Beräkna den *integrerande faktorn* $e^{A(x)}$.
(3) Multiplicera ekvationen $y'(x) + a(x)y(x)$ med den integrerande faktorn.

Notera att det är $e^{A(x)}$, inte primitiven $A(x)$, som är den integrerande faktorn. (Det är ett vanligt fel att man i (3) multiplicerar med $A(x)$. Det fungerar ej.)

Låt oss se vad vi får. Om vi låter $f(x) = e^{A(x)}$ och $g(x) = y(x)$ följer av produktregeln baklänges att

$$\begin{aligned} e^{A(x)}(y'(x) + a(x)y(x)) = (e^{A(x)})y'(x) + (a(x)e^{A(x)})y(x) &= f(x)g'(x) + f'(x)g(x) \\ &= (f(x)g(x))' = (e^{A(x)}y(x))'. \end{aligned}$$

Vår differentialekvation kan alltså skrivas

$$(e^{A(x)}y(x))' = b(x)e^{A(x)}.$$

Glöm inte att även multiplicera även HL med den integrerande faktorn. (Detta är ett annat vanligt fel.) Sedan kan vi snabbt lösa ekvationen:

$$\begin{aligned} e^{A(x)}y(x) &= \int b(x)e^{A(x)}dx, \\ y(x) &= e^{-A(x)}\int b(x)e^{A(x)}dx. \end{aligned}$$

Först integrerade vi båda sidor i ekvationen, sedan delade vi båda sidor med den integrerande faktorn.

Exempel 2.1. Lös differentialekvationen $y'/x = x^2 - y$. Vi skriver om den som en linjär differentialekvation:

$$y' + xy = x^3.$$

De givna funktionerna är $a(x) = x$ och $b(x) = x^3$. Metoden ovan ger lösningsgången

$$\begin{aligned}
A(x) &= x^2/2, \\
e^{A(x)} &= e^{x^2/2}, \\
e^{x^2/2}y' + (xe^{x^2/2})y &= x^3 e^{x^2/2}, \\
(e^{x^2/2}y)' &= x^3 e^{x^2/2}, \\
e^{x^2/2}y &= \int x^3 e^{x^2/2} = \int x^2 (xe^{x^2/2})dx \\
&= x^2 e^{x^2/2} - \int 2xe^{x^2/2} = (x^2 - 2)e^{x^2/2} + C, \\
y &= x^2 - 2 + Ce^{-x^2/2},
\end{aligned}$$

där C är en integrationskonstant. Notera hur kedjeregeln användes baklänges två gånger i samband med partialintegrationen.

Givetvis avslutar vi med att KONTROLLERA SVARET: $y' = 2x - xCe^{-x^2/2} = x^3 - xy$ stämmer!