

Innehåll

1	Inledning	2
2	Måttet av en öppen mängd	3
3	Integralen av en kontinuerlig funktion	9
4	Jämförelse med Riemannintegralen	14
5	Skivformeln och itererad integration	17
6	Generaliserade positiva integraler	25
7	Nollmängder och uppdelning av integraler	30
8	Variabelbyten i dubbelintegraler	36
8.1	Linjära variabelbyten	38
8.2	Polärt variabelbyte	44
9	Trippelintegralen och rymdpolärt variabelbyte	48
A	Generaliserade teckenväxlande integraler	59
B	Halvkontinuerliga funktioner	63

1 Inledning

Detta kompendium utvecklar den grundläggande integrationsteorin för funktioner av flera variabler med utgångspunkt från öppna mängder och deras mått. Vi behandlar här framförallt dubbelintegralen

$$\iint_D f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

av en kontinuerlig funktion $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ över en öppen mängd $D \subset \mathbf{R}^2$ i planet. I kapitel 9 betraktar vi även trippelintegralen

$$\iiint_D f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3$$

över en kropp $D \subset \mathbf{R}^3$. Men det är framförallt steget från enkelintegralen till dubbelintegralen som innebär nya begrepp och tekniker. När man behärskar dubbelintegralen är steget till trippel- och multipelintegraler litet. Kom ihåg att enkelintegralen $\int_a^b f(x) dx$, om $f \geq 0$, geometriskt betyder arean under grafen till f , det vill säga under kurvan $y = f(x)$ och över intervallet (a, b) på x -axeln. Analogt är den geometriska betydelsen av dubbelintegralen $\iint_D f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$, då $f \geq 0$, volymen under grafen till f , det vill säga under ytan $x_3 = f(x_1, x_2)$ och över mängden D i $x_1 x_2$ -planet. Vi kallar denna tredimensionella mängd för f 's *subgraf* över D , och skriver $G_D(f)$. Vi har alltså

$$\iint_D f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = |G_D(f)|, \quad (1.1)$$

där $|\Omega|$ betecknar *måttet* av en öppen mängd Ω . Är Ω en mängd i rummet \mathbf{R}^3 betyder mått volym, är Ω en mängd i planet \mathbf{R}^2 betyder mått area och är Ω en mängd på linjen \mathbf{R} betyder mått längd. Vi definierar måttet av öppna mängder Ω i kapitel 2, vilket genom (1.1) definierar dubbelintegralen. För att sedan ha en användbar teori, måste vi ha metoder för att räkna ut $\iint_D f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$, givet en funktion $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ på ett område D . För enkelintegralen $\int_a^b f(x) dx$ har man som bekant insättningsformeln

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b,$$

där $F(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$. I kapitel 5 visar vi hur dubbelintegralen beräknas med itererad (=upprepad) enkelintegration genom

$$\iint_D f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x_1)}^{\beta(x_1)} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1.$$

För att finna dubbelintegralens värde behöver man, givet området $D \subset \mathbf{R}^2$, förutom att beräkna två primitiva funktioner (med avseende på x_2 och x_1 respektive), även förstå hur man finner gränserna (a, b) för den yttre integralen samt gränserna $(\alpha(x_1), \beta(x_1))$ för den inre integralen, i vilken x_1 är fixt.

För enkelintegralen ser områdena man integrerar över, det vill säga intervall, alltid i princip likadana ut. Detta i kontrast med dubbelintegralen, där mängder $D \subset \mathbf{R}^2$ uppvisar en betydligt större variation. Två integrationstekniker vid sidan om itererad integration, kan här vara användbara. I kapitel 7 lär vi oss hur man kan uppdelat området D i enklare delområden D_1, \dots, D_k i Följdsats 7.7. Analogt med envariabelfallet kan man också byta variabler i dubbelintegraler. Detta är ämnet för kapitel 8 där vi fokuserar på de två mest användbara variabelbytena. Dessa är linjära variabelbyten, vilka används då till exempel området är ett parallelogram eller en triangel, och det polära variabelbytet, vilket man framförallt använder då området är cirkulärt. Ett viktigt specialfall av polärt variabelbyte är den så kallade radialformeln som man använder då området är cirkulärt och funktionen är radiellt symmetrisk. Vi ger här två bevis av denna formel, där det första är en tillämpning av skivformeln i kapitel 5. Vi går slutligen i kapitel 9 upp i dimension och ser hur trippelintegraler analogt kan beräknas med itererad integration och med den tredimensionella motsvarigheten till polärt variabelbyte: det rymdpolära variabelbytet. Detta ger oss ytterligare tekniker för att beräkna volymer.

Kapitel 6 behandlar generaliserade integraler. En integral kallas generaliserad då området D och/eller integranden f tillåts vara obegränsad stor. I detta fall är man ofta intresserad av att veta om integralen är konvergent eller ej. I Sats 6.9 lär vi oss jämförelsekriterier med vilka man kan avgöra om integralen är konvergent eller divergent utan att behöva räkna ut dess exakta värde. I kapitel 6 betraktar vi enbart fallet då $f \geq 0$ eftersom fallet då f tillåts växla tecken blir något mer komplicerat och lämnas till Bilaga A. De två bilagorna är avsedda för den mer teoretiskt intresserade läsaren.

Detta kompendium är en vidareutveckling och omarbetning av Böiers–Claessons kapitel om integration i [1], mer specifikt avsnittet om generaliserade integraler. Det är tänkt att användas tillsammans med [1] och ersätta teorin på s. 129–204. Detta kompendium innehåller några få exempel som visar hur teorin används i praktiken. Det är dock tänkt att läsaren också ska studera exemplen i [1, s. 129–204].

Vi kommer här använda delmängdssymbolen på det praktiska sättet, det vill säga med $A \subset B$ menar vi att A är en delmängd av B , inte nödvändigtvis strikt. Vill vi ange att delmängden är strikt (vilket är ytterst sällan) skrivs detta $A \subsetneq B$. Vidare menar vi med att f är positiv att $f \geq 0$. Vi avstår från att använda den mer korrekta terminologin icke-negativ.

2 Måttet av en öppen mängd

Vårt mål i de två inledande kapitlen är att definiera dubbelintegralen

$$\iint_D f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2$$

av en kontinuerlig och begränsad funktion $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ över en öppen och begränsad mängd $D \subset \mathbf{R}^2$ i planet.

Anmärkning 2.1. I kapitel 2-5 kommer vi genomgående att anta att alla funktioner är begränsade och att alla mängder är begränsade. Eftersom vi senare i kapitel 6

kommer att generalisera denna teori till obegränsade funktioner och mängder, kommer vi explicit skriva ut i satserna att funktionen och mängden antas vara begränsade bara om detta verkligen är ett nödvändigt antagande och inte senare tas bort.

Vi antar till att börja med att $f(\mathbf{x}) \geq 0$ i varje punkt $\mathbf{x} \in D$ och betraktar den tredimensionella mängden

$$G_D(f) := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 ; (x_1, x_2) \in D, 0 < x_3 < f(x_1, x_2)\},$$

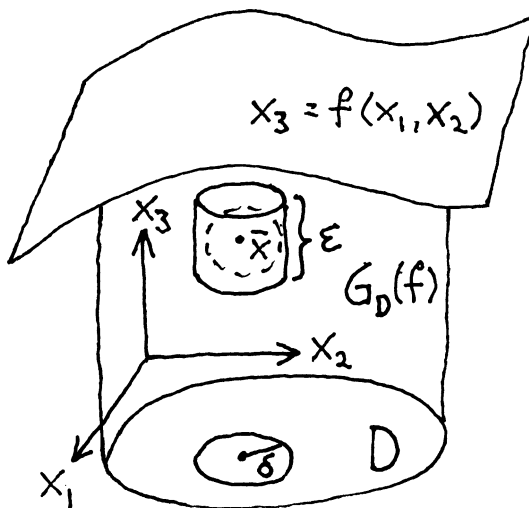
som vi kallar f 's *subgraf* över området D . Subgrafen är alltså området under f 's graf, det vill säga ytan $x_3 = f(x_1, x_2)$, och rakt över mängden D i x_1x_2 -planet.

Vi kommer ihåg att en mängd $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ är *öppen* om varje punkt $\mathbf{x} \in \Omega$ är en inre punkt, det vill säga om det existerar ett litet $r > 0$ så att klotet

$$B(\mathbf{x}, r) := \{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^3 ; |\mathbf{y} - \mathbf{x}| < r\}$$

är helt innehållit i Ω . Öppenhet av en plan mängd $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ och för mängder $\Omega \subset \mathbf{R}$ på linjen definieras på samma sätt med hjälp av cirkelskivor (2-klot) respektive intervall (1-klot).

Övning 2.2. Låt $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ vara en öppen mängd och låt V vara en linje (eller ett plan) i \mathbf{R}^3 . Visa att tvärsnittet $\Omega \cap V$ är en öppen mängd, betraktad som delmängd av \mathbf{R} (eller \mathbf{R}^2). Visa också att projektionen av Ω på V är en öppen mängd, betraktad som delmängd av \mathbf{R} (eller \mathbf{R}^2).



Lemma 2.3. Låt $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ vara en positiv funktion. Om $D \subset \mathbf{R}^2$ är en öppen mängd i planet och om f är en kontinuerlig funktion, så är subgrafan $G_D(f) \subset \mathbf{R}^3$ en öppen mängd i rummet.

Bevis. Låt $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in G_D(f)$ vara en punkt i subgrafan, så att $0 < x_3 < f(x_1, x_2)$. Låt $\epsilon > 0$ vara tillräckligt litet så att $0 < x_3 - \epsilon$ och $x_3 + \epsilon < f(x_1, x_2)$. Eftersom f är en kontinuerlig funktion och D är en öppen mängd, finns $\delta > 0$ så att

$$(y_1, y_2) \in D \text{ och } f(y_1, y_2) \geq f(x_1, x_2) - \epsilon/2, \quad \text{då } |(y_1, y_2) - (x_1, x_2)| \leq \delta.$$

Låt nu $r := \min(\delta, \epsilon/2) > 0$. Vi ska visa $B(\mathbf{x}, r) \subset G_D(f)$, vilket innebär att \mathbf{x} är en inre punkt i $G_D(f)$. Antag därför att \mathbf{y} ligger i klotet, det vill säga att $|\mathbf{y} - \mathbf{x}| < r$. Speciellt ligger då \mathbf{y} i cylindern med centrum i \mathbf{x} , med höjd ϵ och radie δ , det vill säga

$$\begin{aligned} |(y_1, y_2) - (x_1, x_2)| &< \delta, \\ |y_3 - x_3| &< \epsilon/2. \end{aligned}$$

Eftersom $x_3 > \epsilon$ följer det av andra ekvationen att $y_3 > 0$. Vidare följer av första ekvationen att $(y_1, y_2) \in D$ och $f(y_1, y_2) \geq f(x_1, x_2) - \epsilon/2$. Därför är

$$y_3 < x_3 + \epsilon/2 \leq f(x_1, x_2) - \epsilon + \epsilon/2 = f(x_1, x_2) - \epsilon/2 \leq f(y_1, y_2).$$

Vi har visat att varje $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, r)$ tillhör subgrafan $G_D(f)$. Sålunda är subgrafan en öppen mängd. \square

Anmärkning 2.4. Vi ser från beviset ovan att den egenskap hos f vi egentligen behöver för att subgrafan $G_D(f)$ ska vara öppen är att för varje $(x_1, x_2) \in D$ och varje $\epsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ sådant att

$$f(y_1, y_2) \geq f(x_1, x_2) - \epsilon, \quad \text{då } |(y_1, y_2) - (x_1, x_2)| \leq \delta.$$

En funktion f som uppfyller detta villkor kallas *nedåt halvkontinuerlig*.

Vi ska nu definiera vad som menas med måttet (=volymen) $|\Omega|$ av en öppen mängd $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ och därefter definiera dubbelintegralen av f över D som

$$\iint_D f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 := |G_D(f)|,$$

förutsatt att f är en positiv funktion och att subgrafan $G_D(f)$ är öppen. Speciellt gäller det sistnämnda om f är en kontinuerlig funktion på en öppen mängd D enligt Lemma 2.3.

Definition 2.5. Låt $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ vara en öppen mängd. En följd $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \dots$ av öppna delmängder till Ω , kort skrivet $(\Omega_j)_{j=0}^\infty$, kallas en *uttömmande svit* för Ω om

$$\Omega_0 \subset \Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \dots \subset \Omega$$

och $\bigcup_{j=0}^\infty \Omega_j = \Omega$. En uttömmande svit är alltså en växande följd av öppna delmängder som uttömmar Ω . Vi säger att Ω_j växer mot Ω och skriver $\Omega_j \nearrow \Omega$.

Låt $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ vara en öppen och begränsad mängd. För att definiera måttet av Ω ska vi använda oss av en speciell uttömmande svit: den *kanoniska sviten* $(U_j)_{j=0}^\infty$ för Ω . Vi beskriver nu hur, givet mängden Ω , man konstruerar mängderna $U_0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \dots \subset \Omega$. Vi bildar den första mängden U_0 enligt följande.

- (i) Dela upp hela rummet \mathbf{R}^3 i kuber Q med sidlängder 1 och hörn i punkter med heltalskoordinater. En sådan kub kan alltså skrivas

$$Q = (n_1, n_1 + 1) \times (n_2, n_2 + 1) \times (n_3, n_3 + 1),$$

där n_1, n_2, n_3 är heltal.

- (ii) Välj ut de kuber Q från steg (i) sådana att $\overline{Q} \subset \Omega$. Observera att vi kräver att hela kuben, inklusive sidytor, kanter och hörn, är en delmängd av Ω .
- (iii) Bilda unionen \tilde{U}_0 av de slutna kuberna \overline{Q} valda i steg (ii) och låt $U_0 := (\tilde{U}_0)^\circ$ vara den öppna mängd som är det inre av \tilde{U}_0 .

Anmärkning 2.6. Betrakta en punkt \mathbf{x} på en gemensam sidyta till två kuber Q_1 och Q_2 . Vi ser att \mathbf{x} är en inre punkt i \tilde{U}_0 , det vill säga tillhör U_0 , om och endast om både Q_1 och Q_2 valdes i (ii). För kantlinjer gäller på samma sätt att alla fyra angränsande kuber måste ha valts för att kantlinjen ska ingå i U_0 , och för hörnpunkter måste alla åtta angränsande kuber valts.

Mängderna U_j i den kanoniska sviten bildas sedan analogt genom att använda kuber med sidlängd $1/2^j$. Till exempel för att bilda U_1 delar vi i steg (i) in \mathbf{R}^3 i kuber med sidlängd $1/2$ och hörn i punkter med koordinater som är $1/2$ gånger ett heltal. En sådan kub kan skrivas

$$Q = (n_1/2, (n_1 + 1)/2) \times (n_2/2, (n_2 + 1)/2) \times (n_3/2, (n_3 + 1)/2),$$

där n_1, n_2, n_3 är heltal. (Vi har alltså delat in varje kub som vi använde för U_0 i 8 lika mindre kuber.) Genom att välja de av dessa kuber sådana att $\overline{Q} \subset \Omega$, bilda unionen \tilde{U}_1 av alla dessa slutna kuber och låta $U_1 := (\tilde{U}_1)^\circ$ vara det inre av denna union, har vi konstruerat U_1 .

På liknande sätt bildas sedan alla de övriga öppna mängderna U_j . Vi ser att det slutna höljet \overline{U}_j , det vill säga \tilde{U}_j , är unionen av ett ändligt antal, säg N_j , slutna kuber

$$\overline{Q} = [n_1/2^j, (n_1 + 1)/2^j] \times [n_2/2^j, (n_2 + 1)/2^j] \times [n_3/2^j, (n_3 + 1)/2^j],$$

där n_1, n_2, n_3 är heltal. Eftersom alla dessa kuber Q , var och en med volym $(1/2^j)^3$, är disjunkta är det naturligt att definiera måttet av U_j som

$$|U_j| := N_j(1/2^j)^3.$$

Anledningen till att betrakta den kanoniska sviten är just att måttet $|U_j|$ är enkelt att räkna ut.

Anmärkning 2.7. Alla dessa kuber

$$(n_1/2^j, (n_1 + 1)/2^j) \times (n_2/2^j, (n_2 + 1)/2^j) \times (n_3/2^j, (n_3 + 1)/2^j),$$

$n_1, n_2, n_3, j \in \mathbf{Z}$, kallas för *dyadiska kuber*, av ordet dyad som är associerat med talet två, eftersom de kuber som används för U_{j+1} fås genom att halvera de som användes för U_j i alla tre riktningar (vilket ger 8 stycken mindre kuber).

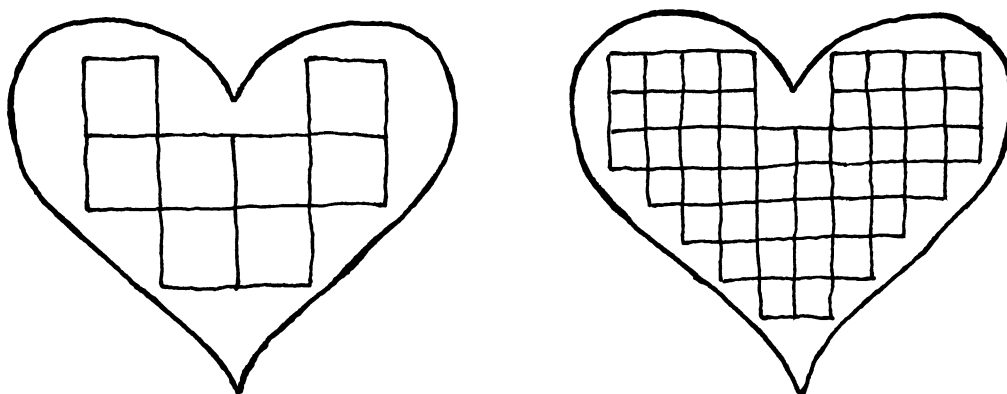
Övning 2.8. Visa att om Ω är en öppen mängd, så är den kanoniska sviten $(U_j)_{j=0}^\infty$, bildad enligt ovan, en uttömmande svit för Ω .

Definition 2.9. Måttet av en öppen mängd Ω definieras som gränsvärdet

$$|\Omega| := \lim_{j \rightarrow \infty} |U_j|,$$

där $(U_j)_{j=0}^\infty$ betecknar den kanoniska sviten för Ω . Detta gränsvärde existerar eftersom $U_j \nearrow \Omega$ och $|U_j|$ därmed bildar en växande följd av tal. Eftersom vi här antagit att Ω är en begränsad mängd är även $(|U_j|)_{j=0}^\infty$ en begränsad följd (varför?) och har därför ett ändligt gränsvärde.

Vi har ovan beskrivit hur måttet (=volymen) av en öppen mängd $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ i rummet beräknas. Måttet (=arean) av en öppen mängd $D \subset \mathbf{R}^2$ i planet och måttet (=längden) av en öppen mängd $I \subset \mathbf{R}$ på linjen definieras helt analogt, fast enklare. I planet till exempel ersätter vi de dyadiska kuberna med dyadiska kvadrater, och bildar analogt den kanoniska sviten $(U_j)_{j=0}^\infty$ med hjälp av dessa. Enda skillnaden är att måttet av en kvadrat med sidlängd 2^{-j} är $(2^{-j})^2$, inte $(2^{-j})^3$ som för kuberna. (Notera att genom halvering av en dyadisk kvadrat i de två riktningarna bildas 4



mindre dyadiska kvadrater.) Vi sätter alltså $|U_j| := N_j(2^{-j})^2$ och $|\Omega| := \lim_{j \rightarrow \infty} |U_j|$. Å andra sidan, på linjen ersätter vi de dyadiska kuberna med dyadiska intervall. Vi sätter här $|U_j| := N_j 2^{-j}$ och $|\Omega| := \lim_{j \rightarrow \infty} |U_j|$.

Vi noterar även följande samband mellan area och volymmått.

Sats 2.10. Låt $D \subset \mathbf{R}^2$ vara en öppen mängd och låt $a > 0$ vara en positiv konstant. Då ges volymen av cylindern $D \times (0, a) \subset \mathbf{R}^3$ över D med höjd a av $|D \times (0, a)| = a|D|$. Enligt Definitionen 3.1 av dubbelintegralen betyder detta att

$$\iint_D a \, dx_1 dx_2 = a|D|.$$

Bevis. Låt $(U_j^2)_{j=0}^\infty$ och $(U_j^3)_{j=0}^\infty$ beteckna de kanoniska sviterna för D respektive $D \times (0, a)$. Betrakta en av mängderna U_j^2 för D och låt C vara en av kvadraterna som valdes i konstruktionen av U_j^2 . Vid konstruktionen av motsvarande tredimensionella mängd U_j^3 ser man att en stapel av kuber ovanför C kommer att väljas. Höjden av denna stapel kommer vara högst a och minst $(a - 2^{-j}) - 2^{-j}$ (varför?). Detta ger uppskattningen

$$(a - 2^{1-j})|U_j^2| \leq |U_j^3| \leq a|U_j^2|.$$

Låter vi nu $j \rightarrow \infty$, följer per definition att $a|D| \leq |D \times (0, a)| \leq a|D|$, vilket skulle visas. \square

Övning 2.11. Formulera motsvarande samband mellan längd och areamått. Vad säger detta om en rektangels area?

Övning 2.12. Visa att om Ω_1 och Ω_2 är två öppna mängder sådana att $\Omega_1 \subset \Omega_2$ så är $|\Omega_1| \leq |\Omega_2|$.

Följande sats, som visar att måttet är oberoende av valet av uttömmande svit, är den teoretiska grunden för hela detta kompendium. Vi kommer ha mycket stor användning av den.

Sats 2.13. Låt Ω vara en öppen mängd och låt $\Omega_j \nearrow \Omega$ vara en uttömmande svit för Ω . Då gäller att

$$|\Omega_j| \longrightarrow |\Omega|, \quad \text{då } j \longrightarrow \infty.$$

Bevis. Enligt övning 2.12 gäller att

$$|\Omega_1| \leq |\Omega_2| \leq \dots \leq |\Omega|,$$

eftersom $(\Omega_j)_{j=0}^\infty$ är en växande följd av delmängder. Låt t vara ett godtyckligt tal sådant att $t < |\Omega|$. Vi behöver visa att det existerar en mängd Ω_J , så att $|\Omega_J| \geq t$. För detta använder vi den kanoniska sviten $(U_k)_{k=0}^\infty$ för Ω . Per definition finns en mängd U_K sådan att $|U_K| \geq t$, ty $t < |\Omega| = \lim_{k \rightarrow \infty} |U_k|$. Från konstruktionen av U_K följer att $\bar{U}_K = \tilde{U}_K$ är en begränsad och därmed kompakt mängd. Vi noterar nu att

$$\bar{U}_K \subset \Omega = \bigcup_{j=0}^{\infty} \Omega_j,$$

det vill säga $(\Omega_j)_{j=0}^\infty$ är en öppen övertäckning av den kompakta mängden \bar{U}_K . Enligt Heine–Borels övertäckningssats kan vi därför välja ett ändligt antal mängder $\Omega_{j_1}, \dots, \Omega_{j_N}$ så att även $\bar{U}_K \subset \Omega_{j_1} \cup \dots \cup \Omega_{j_N}$. Låt $J := \max(j_1, \dots, j_N)$ beteckna det största av dessa index. Eftersom följderna $(\Omega_j)_{j=0}^\infty$ är växande är $\Omega_{j_1} \cup \dots \cup \Omega_{j_N} = \Omega_J$, och därför är $\bar{U}_K \subset \Omega_J$. Av övning 2.12 följer att $|\Omega_J| \geq |U_K| \geq t$, vilket visar satsen. \square

Sats 2.14. Låt Ω_1 och Ω_2 vara två öppna mängder. Då är även unionen $\Omega_1 \cup \Omega_2$ och snittet $\Omega_1 \cap \Omega_2$ öppna mängder och

$$|\Omega_1 \cup \Omega_2| + |\Omega_1 \cap \Omega_2| = |\Omega_1| + |\Omega_2|.$$

Bevis. Att visa att unionen och snittet är öppna mängder lämnas som övning åt läsaren. Låt nu $(U_j^1)_{j=0}^\infty$ och $(U_j^2)_{j=0}^\infty$ vara de kanoniska sviterna för Ω_1 och Ω_2 respektive. Det följer att $(U_j^1 \cup U_j^2)_{j=0}^\infty$ och $(U_j^1 \cap U_j^2)_{j=0}^\infty$ är uttömmande sviter (varför?) för $\Omega_1 \cup \Omega_2$ och $\Omega_1 \cap \Omega_2$ respektive. (I själva verket är $(U_j^1 \cap U_j^2)_{j=0}^\infty$ den kanoniska sviten för $\Omega_1 \cap \Omega_2$, men motsvarande för unionen är inte nödvändigtvis sant.) Vidare är

$$|U_j^1 \cup U_j^2| + |U_j^1 \cap U_j^2| = |U_j^1| + |U_j^2|$$

för varje $j \geq 0$. För att se detta, låt N_j^1 , N_j^2 och N_j^\cap beteckna antalet kuber som bygger upp U_j^1 , U_j^2 och $U_j^1 \cap U_j^2$ respektive. Då är $U_j^1 \cup U_j^2$ unionen av $N_j^1 + N_j^2 - N_j^\cap$ kuber (varför?). Alltså är

$$|U_j^1 \cup U_j^2| = (N_j^1 + N_j^2 - N_j^\cap)(2^{-j})^3 = |U_j^1| + |U_j^2| - |U_j^1 \cap U_j^2|,$$

vilket skulle visas. Om vi nu låter $j \rightarrow \infty$ och använder Sats 2.13, följer att $|\Omega_1 \cup \Omega_2| + |\Omega_1 \cap \Omega_2| = |\Omega_1| + |\Omega_2|$. \square

Följdsats 2.15. Låt Ω_1 och Ω_2 vara två öppna mängder. Då är $|\Omega_1 \cup \Omega_2| \leq |\Omega_1| + |\Omega_2|$. Om dessutom Ω_1 och Ω_2 är disjunkta så att $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, så är

$$|\Omega_1 \cup \Omega_2| = |\Omega_1| + |\Omega_2|.$$

3 Integralen av en kontinuerlig funktion

Med hjälp av den kanoniska sviten definierade vi i kapitel 2 måttet av en öppen mängd. Med hjälp av måttbegreppet kan vi nu definiera dubbelintegralen av en kontinuerlig funktion. Vi börjar med att betrakta positiva funktioner.

Definition 3.1. Låt $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ vara en positiv funktion med öppen subgraf definierad på en öppen mängd $D \subset \mathbf{R}^2$. Då definieras dubbelintegralen av f över D som volymen

$$\iint_D f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 := |G_D(f)|$$

av subgrafen. Notera att speciellt har f öppen subgraf om f är en kontinuerlig funktion enligt Lemma 2.3. Vi skriver här kortfattat $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ för punkter i planet.

Definition 3.2. Låt $f_0, f_1, f_2, \dots, f : D \rightarrow \mathbf{R}$. Vi säger att $(f_j)_{j=0}^\infty$ växer mot f , vilket skrivs $f_j \nearrow f$, om $f_0(\mathbf{x}) \leq f_1(\mathbf{x}) \leq f_2(\mathbf{x}) \leq \dots$ och $f(\mathbf{x}) = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(\mathbf{x})$ för alla $\mathbf{x} \in D$.

Övning 3.3. Visa att om $f_j \geq 0$ har öppna subgrafer så gäller att $f_j \nearrow f$ om och endast om $G_D(f_j) \nearrow G_D(f)$.

Som ett specialfall av Sats 2.13 noterar vi nu följande.

Lemma 3.4. Låt $D \subset \mathbf{R}^2$ vara en öppen mängd, och antag att $(f_j)_{j=0}^\infty$ är en följd av positiva funktioner med öppna subgrafer på D som växer mot f . Då har även f öppen subgraf och

$$\iint_D f_j(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \longrightarrow \iint_D f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2, \quad \text{då } j \longrightarrow \infty.$$

Bevis. Att $f_j \nearrow f$ betyder i termer av subgraferna att $(\Omega_j)_{j=0}^\infty$ är en uttömmande svit för Ω , där $\Omega_j := G_D(f_j)$ och $\Omega = G_D(f)$ är respektive subgrafer. Speciellt är $\Omega = \bigcup_{j=0}^\infty \Omega_j$ en union av öppna mängder och därför öppen. Från Sats 2.13 följer vidare att

$$\iint_D f_j(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 = |\Omega_j| \longrightarrow |\Omega| = \iint_D f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2, \quad \text{då } j \longrightarrow \infty,$$

vilket visar lemmat. \square

Per definition finner vi alltså värdet av dubbelintegralen $\iint_D f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2$ genom att beräkna måttet av dess subgraf, som är en öppen mängd i \mathbf{R}^3 . Med följande sats visar vi nu omvänt att måttet av en godtycklig öppen mängd $\Omega \subset \mathbf{R}^3$, inte nödvändigtvis en subgraf, kan beräknas med hjälp av en dubbelintegral.

Sats 3.5 (Stavformeln). Låt $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ vara en öppen mängd. Beteckna med

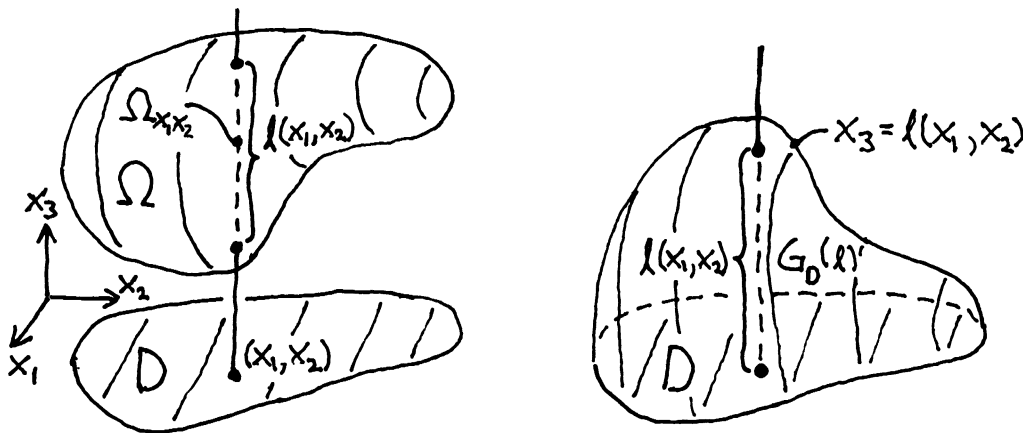
$$D := \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 ; \text{det existerar } x_3 \in \mathbf{R} \text{ sådant att } (x_1, x_2, x_3) \in \Omega\},$$

projektionen av Ω på x_1x_2 -planet. Vidare, givet $(x_1, x_2) \in D$, låt

$$\Omega_{(x_1, x_2)} := \{x_3 \in \mathbf{R} ; (x_1, x_2, x_3) \in \Omega\}$$

beteckna tvärsnittet av Ω över $(x_1, x_2) = \mathbf{x}$. Då är mängderna $D \subset \mathbf{R}^2$ och $\Omega_{\mathbf{x}} \subset \mathbf{R}$ öppna. Vidare, om $l(\mathbf{x}) := |\Omega_{\mathbf{x}}|$ betecknar måttet (=längden) av $\Omega_{\mathbf{x}}$, då har funktionen $l : D \rightarrow \mathbf{R}$ öppen subgraf och vi har att

$$|\Omega| = \iint_D l(\mathbf{x}) dx_1 dx_2. \quad (3.1)$$



Bevis. Enligt övning 2.2 är D och $\Omega_{\mathbf{x}}$ öppna mängder. Betrakta en mängd U_j i den kanoniska sviten för Ω . Definiera för $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in D$ motsvarande tvärsnitt

$$(U_j)_{(x_1, x_2)} := \{x_3 \in \mathbf{R} ; (x_1, x_2, x_3) \in U_j\}$$

för mängderna U_j och låt $N_j(\mathbf{x})$ beteckna antalet intervall av längd 2^{-j} som $(U_j)_{\mathbf{x}}$ är unionen av. Vi har alltså att längden av $(U_j)_{\mathbf{x}}$ är

$$l_j(\mathbf{x}) := |(U_j)_{\mathbf{x}}| = 2^{-j} N_j(\mathbf{x}).$$

(i) Vi ser vidare att funktionen l_j är konstant med värdet $2^{-j} N_j$ på det inre av varje dyadisk kvadrat C med sidlängd 2^{-j} . Beteckna det konstanta värdet av $N_j(\mathbf{x})$ på C med $N_j(C)$. Genom att summera över alla de dyadiska kvadraterna ser vi att det totala antalet kuber i U_j är $\sum_C N_j(C)$. Den totala volymen av U_j är därför

$$|U_j| = \left(\sum_C N_j(C) \right) (2^{-j})^3 = \sum_C (2^{-j} N_j(C)) (2^{-j})^2 = \iint_D l_j(\mathbf{x}) dx_1 dx_2. \quad (3.2)$$

Vi ska nedan i steg (iii) visa att alla trappfunktionerna l_j har öppna subgrafer, så vänsterledet i (3.2) är väldefinierat.

(ii) Eftersom $(U_j)_{j=0}^\infty$ är en uttömmande svit för Ω , är även $((U_j)_\mathbf{x})_{j=0}^\infty$ en uttömmande svit för $\Omega_\mathbf{x}$ (varför?). Sats 2.13 ger därför att

$$l_j(\mathbf{x}) = |(U_j)_\mathbf{x}| \longrightarrow |\Omega_\mathbf{x}| = l(\mathbf{x}), \quad \text{för varje } \mathbf{x} \in D.$$

Vidare är l_j en växande följd av funktioner. Därför visar Lemma 3.4 att $l(\mathbf{x})$ har öppen subgraf och att

$$\iint_D l_j(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \longrightarrow \iint_D l(\mathbf{x}) dx_1 dx_2, \quad \text{då } j \rightarrow \infty.$$

Vi har även per definition gränsvärdet $|U_j| \rightarrow |\Omega|$, så satsen följer genom gränsövergång i (3.2).

(iii) För att visa att l_j har öppen subgraf, låt $\mathbf{x} \in D$. Enligt anmärkning 2.4 räcker det att visa att det existerar $\delta > 0$ sådant att

$$N_j(\mathbf{y}) \geq N_j(\mathbf{x}), \quad \text{då } |\mathbf{y} - \mathbf{x}| \leq \delta. \quad (3.3)$$

Vi delar in x_1x_2 -planet i kvadrater med sidlängd $1/2^j$ och hörn i punkter med koordinater som är $1/2^j$ gånger ett heltal. Om \mathbf{x} tillhör det inre av en av dessa kvadrater ser vi att för alla \mathbf{y} inuti samma kvadrat är $(U_j)_\mathbf{y} = (U_j)_\mathbf{x}$, varvid (3.3) ses gälla för små δ . Om i stället \mathbf{x} ligger på en kantlinje mellan två angränsande kvadrater följer det av anmärkning 2.6 att för varje \mathbf{y} inuti någon av de angränsande kvadraterna är $(U_j)_\mathbf{y} \supset (U_j)_\mathbf{x}$, samt att $(U_j)_\mathbf{y} = (U_j)_\mathbf{x}$ då \mathbf{y} ligger på samma kantlinje. Även i detta fall följer alltså (3.3) för små δ . Situationen då \mathbf{x} ligger i hörnet av en av kvadraterna behandlas analogt. Sammanfattningsvis har vi visat att funktionen l_j har öppen subgraf. \square

Anmärkning 3.6. Formeln

$$|U_j| = \iint_D l_j(\mathbf{x}) dx_1 dx_2.$$

i beviset ovan kan ses på följande sätt: vi förflyttar helt enkelt kuberna som bygger upp U_j vertikalt och staplar dom på x_1x_2 -planet. Detta förändrar uppenbarligen inte volymen. Vänsterledet betecknar volymen innan medan högerledet är volymen efter.

Vi noterar även att vi på samma sätt kan bilda projektionen D av Ω på till exempel x_1x_3 -planet och mäta längden $l(x_1, x_3)$ av tvärsnittet av Ω parallellt med x_2 -axeln vid (x_1, x_3) . Vi får då stavformeln

$$|\Omega| = \iint_D l(x_1, x_3) dx_1 dx_3.$$

På samma sätt kan vi även mäta längden av tvärsnitten parallella med x_1 -axeln och få en tredje variant av stavformeln.

Följsats 3.7. Låt $D \subset \mathbf{R}^2$ vara en öppen mängd och låt $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ och $g : D \rightarrow \mathbf{R}$ vara två positiva funktioner med öppna subgrafer. Då har även funktionen $f+g$ öppen subgraf och

$$\iint_D (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})) dx_1 dx_2 = \iint_D f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 + \iint_D g(\mathbf{x}) dx_1 dx_2.$$

Bevis. Genom att spegla subgrafen till g i x_1x_2 -planet och ta unionen med f :s subgraf, bildar vi den öppna mängden

$$\Omega := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 ; (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2, -g(x_1, x_2) < x_3 < f(x_1, x_2), x_3 \neq 0\}.$$

Längden av tvärsnittet $\Omega_{\mathbf{x}}$ ses vara $l(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - (-g(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$. Sats 3.5 visar därför att $f + g$ har öppen subgraf och att

$$|\Omega| = \iint_D (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})) dx_1 dx_2.$$

Eftersom en mängd och dess spegelbild i x_1x_2 -planet har samma mått (varför?) ger vidare Följdsats 2.15 att $|\Omega| = |G_D(f)| + |G_D(g)|$ och beviset är klart. \square

Vi betraktar nu en godtycklig (möjligen teckenväxlande) begränsad kontinuerlig funktion $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ på en öppen mängd $D \subset \mathbf{R}^2$. Från f kan vi konstruera två positiva funktioner: f :s *positiva del*

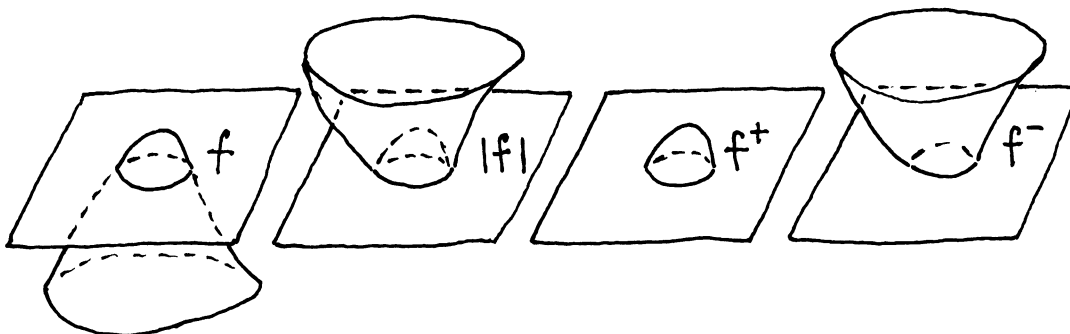
$$f^+(\mathbf{x}) = \max(f(\mathbf{x}), 0) = \begin{cases} f(\mathbf{x}), & \text{då } f(\mathbf{x}) > 0, \\ 0, & \text{då } f(\mathbf{x}) \leq 0, \end{cases}$$

och f :s *negativa del*

$$f^-(\mathbf{x}) = -\min(f(\mathbf{x}), 0) = \begin{cases} 0, & \text{då } f(\mathbf{x}) \geq 0, \\ -f(\mathbf{x}), & \text{då } f(\mathbf{x}) < 0. \end{cases}$$

Vi ser (hur?) att

$$f(\mathbf{x}) = f^+(\mathbf{x}) - f^-(\mathbf{x}), \quad |f(\mathbf{x})| = f^+(\mathbf{x}) + f^-(\mathbf{x}).$$



Övning 3.8. Visa att om g och h är kontinuerliga funktioner, så är även $\max(g, h)$ och $\min(g, h)$ kontinuerliga. Speciellt om f är en kontinuerlig funktion, så är $f^+ \geq 0$ och $f^- \geq 0$ kontinuerliga funktioner.

Definition 3.9. Låt $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ vara en begränsad funktion på en öppen, begränsad mängd $D \subset \mathbf{R}^2$ och antag att det finns två positiva och begränsade funktioner $f_1 : D \rightarrow \mathbf{R}$ och $f_2 : D \rightarrow \mathbf{R}$ med öppna subgrafer sådana att

$$f(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{x}) \quad \text{för alla } \mathbf{x} \in D.$$

Då definierar vi dubbelintegralen

$$\iint_D f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 := \iint_D f_1(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 - \iint_D f_2(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 = |G_D(f_1)| - |G_D(f_2)|.$$

Notera att om f är en begränsad och kontinuerlig funktion, kan vi välja $f_1 = f^+$ och $f_2 = f^-$, för dessa är positiva och är kontinuerliga, och har därför öppna subgrafer enligt Lemma 2.3. Vi har därför definierat dubbelintegralen av varje kontinuerlig och begränsad funktion över varje öppen och begränsad mängd.

För att Definition 3.9 ska vara meningsfull måste vi visa att två olika representationer av f , säg

$$f(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{x}) = g_1(\mathbf{x}) - g_2(\mathbf{x}),$$

ger samma värde för $\iint_D f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2$. För att visa detta använder vi Följdsats 3.7. Vi ser att

$$f_1(\mathbf{x}) + g_2(\mathbf{x}) = g_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{x}),$$

vilket medför att

$$\iint_D f_1(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 + \iint_D g_2(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 = \iint_D g_1(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 + \iint_D f_2(\mathbf{x}) dx_1 dx_2.$$

Därmed är

$$\iint_D f_1(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 - \iint_D f_2(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 = \iint_D g_1(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 - \iint_D g_2(\mathbf{x}) dx_1 dx_2,$$

vilket visar att definitionen av $\iint_D f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2$ är oberoende av valet av f_1 och f_2 .

Övning 3.10. Visa att om $f = f_1 - f_2$, där $f_1 \geq 0$ och $f_2 \geq 0$, så är $|f| \leq f_1 + f_2$ med likhet om och endast om $f_1 = f^+$ och $f_2 = f^-$. Som tidigare betecknar f^+ och f^- den positiva och negativa delen av f . I detta avseende är alltså $f = f^+ - f^-$ det minimala sättet att skriva f som en skillnad mellan två positiva funktioner. Notera att i varje punkt är antingen $f^+(\mathbf{x}) = 0$ eller $f^-(\mathbf{x}) = 0$.

Följdsats 3.11. Låt $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ vara en kontinuerlig begränsad funktion (möjligen teckenväxlande) på en öppen begränsad mängd D . Då gäller följande triangelolikhet för integraler:

$$\left| \iint_D f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \right| \leq \iint_D |f(\mathbf{x})| dx_1 dx_2.$$

Bevis. Vi delar upp f i sin positiva och negativa del f^+ och f^- . Då är $f = f^+ - f^-$ och $|f| = f^+ + f^-$ som ovan och Sats 3.7 ger att

$$\begin{aligned} \left| \iint_D f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \right| &= \left| \iint_D f^+(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 - \iint_D f^-(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \right| \\ &\leq \iint_D f^+(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 + \iint_D f^-(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 = \iint_D |f(\mathbf{x})| dx_1 dx_2, \end{aligned}$$

genom en användning av triangelolikheten för reella tal. \square

Vi noterar slutligen att dubbelintegralen är additiv för godtyckliga kontinuerliga funktioner.

Sats 3.12. Låt $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ och $g : D \rightarrow \mathbf{R}$ vara kontinuerliga och begränsade funktioner (möjligen teckenväxlande) på en öppen begränsad mängd D . Då är

$$\iint_D (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})) dx_1 dx_2 = \iint_D f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 + \iint_D g(\mathbf{x}) dx_1 dx_2.$$

Övning 3.13. Visa Sats 3.12 genom att använda Följdsats 3.7 och att definitionen av $\iint_D f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2$ för en teckenväxlande funktion f är oberoende av valet av f_1 och f_2 .

4 Jämförelse med Riemannintegralen

Syftet med detta kapitel är visa att vår definition här av enkelintegralen av en kontinuerlig och begränsad funktion med hjälp av arean av subgrafer ger samma resultat som Riemannintegralen. För att skilja de båda integralerna åt, låt oss kalla vår integral från Definition 3.9 (eller snarare den analogt definierade enkelintegralen) för *H-integralen*.

Givet en begränsad funktion $f : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ har vi följande två definitioner av dess integral över intervallet $I = (a, b)$.

(i) Antag att f kan skrivas $f = f_1 - f_2$, där f_1 och f_2 är två positiva funktioner med öppna subgrafer $G_I(f_1)$ och $G_I(f_2)$. Då definieras H-integralen av f över I som

$$H \int_a^b f(x) dx := |G_I(f_1)| - |G_I(f_2)|.$$

(ii) Å andra sidan, i envariabelanalysen definierades Riemannintegralen, vilken vi skriver här som $R \int_a^b f(x) dx$, enligt följande.

Definition 4.1. En funktion $t : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ kallas en *trappfunktion* om det finns en intervallindelning $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ och tal c_1, c_2, \dots, c_n så att

$$t(x) = c_k, \quad \text{då } x_{k-1} < x < x_k,$$

för $k = 1, 2, \dots, n$. Riemannintegralen av en trappfunktion definieras som

$$R \int_a^b t(x) dx := \sum_{k=1}^n c_k (x_k - x_{k-1}).$$

Genom att använda trappfunktioner definierar man sedan Riemannintegralen av en mer allmän funktion f genom instängning.

Definition 4.2. Låt $f : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ vara en begränsad funktion.

(a) *Riemanns underintegral* av f över (a, b) är

$$\sup_{t_1 \leq f} R \int_a^b t_1(x) dx,$$

där supremum tas över alla trappfunktioner t_1 sådana att $t_1 \leq f$. Analogt definieras Riemanns överintegral av f över (a, b) som

$$\inf_{t_2 \geq f} R \int_a^b t_2(x) dx,$$

där infimum tas över alla trappfunktioner t_2 sådana att $t_2 \geq f$.

(b) Det gäller alltid att underintegralen är mindre än eller lika med överintegralen. Om de är lika, det vill säga om

$$\sup_{t_1 \leq f} R \int_a^b t_1(x) dx = \inf_{t_2 \geq f} R \int_a^b t_2(x) dx,$$

sågs f vara Riemannintegrerbar. Detta gemensamma värde definieras då som Riemannintegralen av f över (a, b) :

$$R \int_a^b f(x) dx := \sup_{t_1 \leq f} R \int_a^b t_1(x) dx = \inf_{t_2 \geq f} R \int_a^b t_2(x) dx.$$

Övning 4.3. Låt $t : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ vara en positiv trappfunktion sådan att $t(x) = c_k \geq 0$ då $x_{k-1} < x < x_k$, för $k = 1, 2, \dots, n$. Visa att t har öppen subgraf om och endast om

$$t(x_k) \leq \min(c_k, c_{k+1}), \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

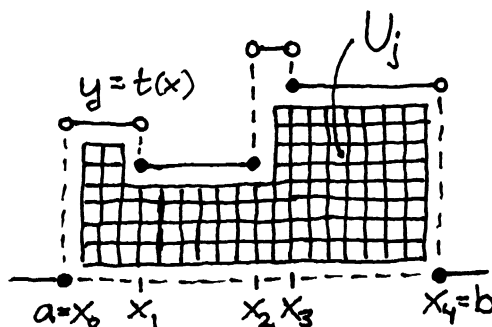
Betrakta nu en kontinuerlig och begränsad funktion $f : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$. Enligt Lemma 2.3 (i fallet $f \geq 0$) och övning 3.8 (då f växlar tecken) följer att H-integralen av f existerar. Vidare kommer vi ihåg från envariabelanalysen att en kontinuerlig och begränsad funktion är Riemannintegrerbar.

Sats 4.4. Antag att funktionen $f : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ är kontinuerlig och begränsad. Då är

$$H \int_a^b f(x) dx = R \int_a^b f(x) dx.$$

Bevis. (i) Vi visar först att H-integralen och Riemannintegralen överensstämmer för positiva trappfunktioner med öppen subgraf. Låt därför $t : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ vara en sådan, säg

$$t(x) = c_k, \quad \text{då } x_{k-1} < x < x_k,$$



för $k = 1, 2, \dots, n$, där $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ är en given intervallindelning och c_1, c_2, \dots, c_n är positiva tal. Betrakta nu den kanoniska sviten $(U_j)_{j=0}^\infty$ för subgrafan $G_I(t)$. Vi ser att i rektangeln $(x_{k-1}, x_k) \times (0, c_k)$ täcks åtminstone den något mindre rektangeln $(x_{k-1} + 2^{-j}, x_k - 2^{-j}) \times (2^{-j}, c_k - 2^{-j})$ helt av kvadraterna med sidlängd 2^{-j} som bygger upp U_j . Vi har alltså areauppskattningen

$$\sum_{k=1}^n (c_k - 2^{1-j})(x_k - x_{k-1} - 2^{1-j}) \leq |U_j| \leq \sum_{k=1}^n c_k(x_k - x_{k-1}).$$

Låter nu här $j \rightarrow \infty$ följer att $R\int_a^b t(x) dx \leq |G_I(t)| \leq R\int_a^b t(x) dx$, det vill säga $H\int_a^b t(x) dx = R\int_a^b t(x) dx$.

(ii) För att visa satsen noterar vi först att vi kan anta att $f \geq 0$, ty annars delar vi upp $f = f^+ - f^-$ i positiv och negativ del. Eftersom satsen antas visad för positiva funktioner är den speciellt visad för f^+ och f^- . Men per definition är

$$H\int_a^b f(x) dx = H\int_a^b f^+(x) dx - H\int_a^b f^-(x) dx,$$

och av lineariteten för Riemannintegralen följer att

$$R\int_a^b f(x) dx = R\int_a^b f^+(x) dx - R\int_a^b f^-(x) dx.$$

Eftersom båda högerleden är lika följer satsen för f .

Antag nu att $f \geq 0$. Eftersom f är Riemannintegrerbar finns det trappfunktioner $t_j \leq f$ sådana att

$$R\int_a^b t_j(x) dx \longrightarrow R\int_a^b f(x) dx, \quad \text{då } j \longrightarrow \infty.$$

Vi kan även anta att dessa trappfunktioner t_j

- (1) har öppna subgrafer,
- (2) att varje t_j är maximal, det vill säga i varje intervall är $c_k = \inf_{(x_{k-1}, x_k)} f(x)$, och
- (3) att indelningen för t_{j+1} är finare än den för t_j , det vill säga varje indelningspunkt x_k för t_j är även en indelningspunkt för t_{j+1} .

Det följer av detta att t_j växer mot f , det vill säga $t_j(x) \nearrow f(x)$ (varför?), och Lemma 3.4 (motsvarande enkelintegralvariant härav) ger nu att

$$H\int_a^b t_j(x) dx \longrightarrow H\int_a^b f(x) dx, \quad \text{då } j \longrightarrow \infty.$$

Men i steg (i) visade vi att $R\int_a^b t_j(x) dx = H\int_a^b t_j(x) dx$ för alla j , så genom gränsövergång följer satsen. \square

Eftersom H-integralen $H\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$ av en kontinuerlig och begränsad funktion f överensstämmer med Riemannintegralen, kan vi nu utan vidare använda viktiga satser som vi lärde oss i envariabelanalysen, till exempel insättningsformeln som säger att om vi känner till en primitiv funktion $F(x)$ till $f(x)$ så kan vi beräkna integralen genom insättning av gränserna i $F(x)$, det vill säga

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Vi kan även använda partiell integration enligt den välkända formeln

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x) dx,$$

och utföra variabelbyte $x = t(y)$ med en variabelbytesfunktion $t : (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$ enligt formeln

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{t^{-1}(a)}^{t^{-1}(b)} f(t(y)) \frac{dt}{dy} dy. \quad (4.1)$$

Kom ihåg att om t är växande är $t^{-1}(a) = \alpha$ och $t^{-1}(b) = \beta$, och om t är avtagande är $t^{-1}(a) = \beta$ och $t^{-1}(b) = \alpha$.

5 Skivformeln och itererad integration

I detta kapitel visar vi huvudtekniken för att beräkna en dubbelintegral, nämligen itererad integration, med vilken dubbelintegralen skrivs om som två enkelintegraler. Detta är ett specialfall av följande formel (5.1), som på grund av sin geometriska tolkning brukar kallas *skivformeln*. Den är snarlik stavformeln (3.1) och beviset är helt analogt.

Sats 5.1 (Skivformeln). *Låt $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ vara en öppen mängd. Beteckna med*

$$I := \{x_1 \in \mathbf{R} ; \text{det existerar } (x_2, x_3) \in \mathbf{R}^2 \text{ sådan att } (x_1, x_2, x_3) \in \Omega\}$$

projektionen av Ω på x_1 -axeln. Vidare, givet $x_1 \in I$, låt

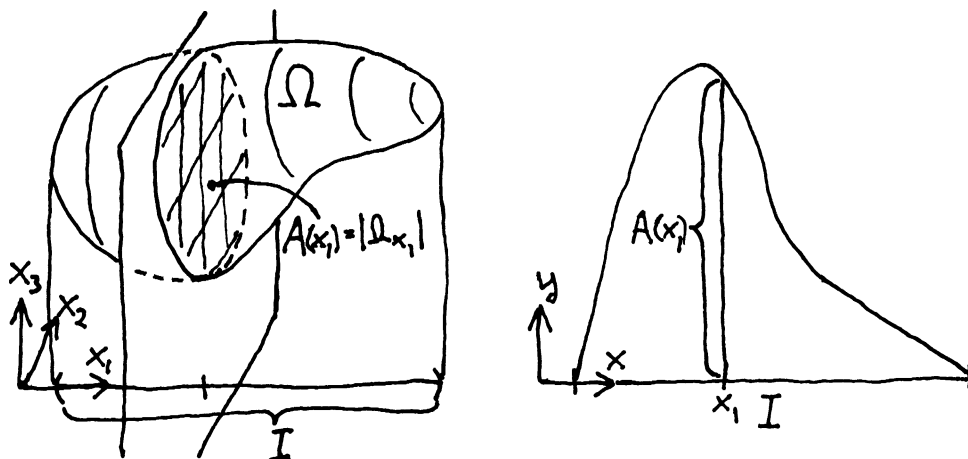
$$\Omega_{x_1} := \{(x_2, x_3) \in \mathbf{R}^2 ; (x_1, x_2, x_3) \in \Omega\}$$

beteckna tvärsnittet av Ω parallellt med x_2x_3 -planet vid x_1 . Då är mängderna $I \subset \mathbf{R}$ och $\Omega_{x_1} \subset \mathbf{R}^2$ öppna. Vidare, om $A(x_1) := |\Omega_{x_1}|$ betecknar måttet (=arean) av Ω_{x_1} , då har funktionen $A : I \rightarrow \mathbf{R}$ öppen subgraf och vi har att

$$|\Omega| = \int_I A(x_1) dx_1. \quad (5.1)$$

Bevis. Enligt övning 2.2 är I och Ω_{x_1} öppna mängder. Betrakta en mängd U_j i den kanoniska sviten för Ω . Definiera för $x_1 \in I$ motsvarande tvärsnitt

$$(U_j)_{x_1} := \{(x_2, x_3) \in \mathbf{R}^2 ; (x_1, x_2, x_3) \in U_j\}$$



för mängderna U_j och låt $N_j(x_1)$ beteckna antalet kvadrater med sidlängd 2^{-j} som $(U_j)_{x_1}$ är unionen av. Vi har alltså att arean av $(U_j)_{x_1}$ är

$$A_j(x_1) := |(U_j)_{x_1}| = (2^{-j})^2 N_j(x_1).$$

(i) Vi ser vidare att funktionen A_j är konstant med värdet $(2^{-j})^2 N_j$ på det inre av varje dyadiskt intervall J av längd 2^{-j} . Beteckna det konstanta värdet av $N_j(x_1)$ på J med $N_j(J)$. Genom att summera över alla de dyadiska intervallen ser vi att det totala antalet kuber i U_j är $\sum_J N_j(J)$. Den totala volymen av U_j är därför

$$|U_j| = \left(\sum_J N_j(J) \right) (2^{-j})^3 = \sum_J ((2^{-j})^2 N_j(J)) 2^{-j} = \int_I A_j(x_1) dx_1. \quad (5.2)$$

Vi ska nedan i steg (iii) visa att alla trappfunktionerna A_j har öppna subgrafer, så vänsterledet i (5.2) är väldefinierat.

(ii) Eftersom $(U_j)_{j=0}^\infty$ är en uttömmande svit för Ω , är även $((U_j)_{x_1})_{j=0}^\infty$ en uttömmande svit för Ω_{x_1} (varför?). Sats 2.13 ger därför att

$$A_j(x_1) = |(U_j)_{x_1}| \longrightarrow |\Omega_{x_1}| = A(x_1) \quad \text{för varje } x_1 \in I.$$

Vidare är A_j en växande följd av funktioner. Därför visar Lemma 3.4 att $A(x_1)$ har öppen subgraf och att

$$\int_I A_j(x_1) dx_1 \longrightarrow \int_I A(x_1) dx_1, \quad \text{då } j \rightarrow \infty.$$

Vi har även per definition gränsvärdet $|U_j| \rightarrow |\Omega|$, så satsen följer genom gränsövergång i (5.2).

(iii) För att visa att A_j har öppen subgraf, låt $x_1 \in I$. Enligt anmärkning 2.4 (motsvarande envariabelvariant härav) räcker det att visa att det existerar $\delta > 0$ sådant att

$$N_j(y_1) \geq N_j(x_1), \quad \text{då } |y_1 - x_1| \leq \delta. \quad (5.3)$$

Vi delar in x_1 -axeln i intervall av längd $1/2^j$ och med ändpunkter som är $1/2^j$ gånger ett heltal. Om x_1 tillhör det inre av ett av dessa intervall ser vi att för alla y_1 inuti

samma intervall är $(U_j)_{y_1} = (U_j)_{x_1}$, varvid (5.3) ses gälla för små δ . Om i stället x_1 ligger i en ändpunkt mellan två angränsande intervall följer det av anmärkning 2.6 att för varje y_1 inuti någon av de angränsande intervallen är $(U_j)_{y_1} \supset (U_j)_{x_1}$. Även i detta fall följer alltså (5.3) med $\delta = 2^{-j}$. Sammanfattningsvis har vi visat att funktionen A_j har öppen subgraf. □

Anmärkning 5.2. Formeln

$$|U_j| = \int_I A_j(x_1) dx_1.$$

i beviset ovan kan ses på följande sätt: vi förflyttar helt enkelt kuberna som bygger upp U_j parallellt med x_2x_3 -planet och staplar dom på x_1 -axeln. Detta förändrar uppenbarligen inte volymen. Vänsterledet är volymen innan medan högerledet är volymen efter (efter lämplig omskalning).

Vi noterar även att vi på samma sätt kan bilda projektionen I av Ω på till exempel x_3 -axeln och mäta arean $A(x_3)$ av tvärsnittet av Ω ortogonalt mot x_3 -axeln vid x_3 . Vi får då skivformeln

$$|\Omega| = \int_I A(x_3) dx_3. \quad (5.4)$$

På samma sätt kan vi även mäta arean av tvärsnitten ortogonala mot x_2 -axeln och få en tredje variant av skivformeln.

Exempel 5.3. Skivformeln, det vill säga formeln (5.1), kan inte bara användas för att räkna ut volymen $|\Omega|$ genom att beräkna arean av alla tvärsnitt och integrera ihop dessa. Som specialfall av skivformeln följer att om två öppna mängder Ω_1 och Ω_2 är sådana att varje tvärsnitt parallellt med ett givet koordinatplan har samma area för båda områdena så har Ω_1 och Ω_2 samma volym. Detta resultat kallas *Cavalieris princip*, efter en italiensk 1600-talsmatematiker, även om denna teknik var känd långt tidigare.

Som exempel, låt

$$\Omega_1 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 ; x_1^2 + x_2^2 < 1, |x_3| < 1\},$$

vara en cylinder och låt

$$\Omega_2 := \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 ; |\mathbf{x} - (17, 19, 0)| < 1\} \cup \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 ; x_1^2 + x_2^2 < x_3^2, |x_3| < 1\},$$

vara en disjunkt union av ett klot och en kon. Man ser att arean av de horisontella tvärsnitten $(\Omega_i)_{x_3}$ är

$$|(\Omega_1)_{x_3}| = \pi$$

respektive

$$|(\Omega_2)_{x_3}| = \pi(1 - x_3^2) + \pi x_3^2 = \pi,$$

då $|x_3| < 1$ och annars 0. Av Cavalieris princip följer därför att cylinderns volym är precis klotets plus konens volym.

Genom att tillämpa skivformeln på subgrafen av en funktion får vi nu följande resultat som kallas itererad integration.

Följsats 5.4 (Itererad integration). Låt $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ vara en kontinuerlig och begränsad funktion på en öppen och begränsad mängd $D \subset \mathbf{R}^2$. Beteckna med

$$I := \{x_1 \in \mathbf{R} ; \text{det existerar } x_2 \in \mathbf{R} \text{ sådan att } (x_1, x_2) \in D\}$$

projektionerna av D på x_1 -axeln. Vidare, givet $x_1 \in I$, låt

$$D_{x_1} := \{x_2 \in \mathbf{R} ; (x_1, x_2) \in D\}$$

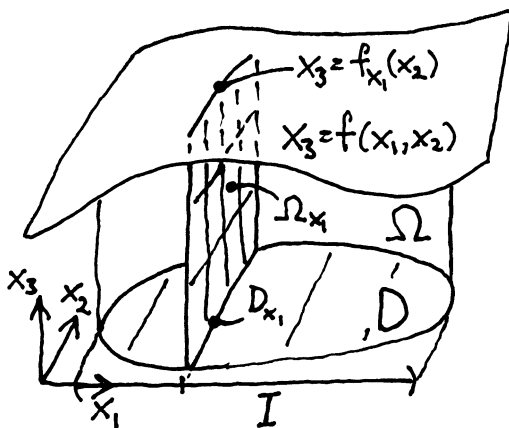
beteckna tvärsnittet av D parallellt med x_2 -axeln vid x_1 . Då är mängderna $I \subset \mathbf{R}$ och $D_{x_1} \subset \mathbf{R}$ öppna. Vidare, om $f_{x_1}(x_2) := f(x_1, x_2)$ betecknar restriktionen av f till linjen D_{x_1} och om

$$A(x_1) := \int_{D_{x_1}} f_{x_1}(x_2) dx_2,$$

så har vi att $\iint_D f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_I A(x_1) dx_1$, det vill säga

$$\iint_D f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_I \left(\int_{D_{x_1}} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1. \quad (5.5)$$

De båda integralerna i högerledet existerar: den inre på grund av att f_{x_1} är kontinuerlig och den yttre på grund av att A uppfyller förutsättningarna i Definition 3.9 (även om A ej nödvändigtvis är kontinuerlig).



Bevis. (i) Vi antar först att även $f \geq 0$. Enligt övning 2.2 är I och D_{x_1} öppna mängder. För att se att (5.5) är ett specialfall av skivformeln (5.1) låter vi $\Omega := G_D(f)$ så att $\iint_D f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = |\Omega|$. Vi ser att tvärsnitten parallella med $x_2 x_3$ -planet är $\Omega_{x_1} = G_{D_{x_1}}(f_{x_1})$ och sålunda är $\int_{D_{x_1}} f_{x_1}(x_2) dx_2 = |\Omega_{x_1}| = A(x_1)$. Sats 5.1 visar därför att $A : I \rightarrow \mathbf{R}$ har öppen subgraf och att

$$\iint_D f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = |\Omega| = \int_I A(x_1) dx_1.$$

(ii) Betrakta nu det allmänna fallet då f möjligen är teckenväxlande. Vi delar upp f i sin positiva och negativa del $f = f^+ - f^-$ som i kapitel 3. Eftersom f^+ och f^- är positiva kontinuerliga funktioner har vi enligt steg (i) att

$$\iint_D f^\pm(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_I A^\pm(x_1) dx_1,$$

där $A^\pm(x_1) := \int_{D_{x_1}} f^\pm(x_2) dx_2$ har öppna subgrafer över I . Enligt Definition 3.9 har vi att $A(x_1) = A^+(x_1) - A^-(x_1)$ eftersom $f_{x_1} = f_{x_1}^+ - f_{x_1}^-$, och att

$$\begin{aligned} \iint_D f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 &= \iint_D f^+(x_1, x_2) dx_1 dx_2 - \iint_D f^-(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \int_I A^+(x_1) dx_1 - \int_I A^-(x_1) dx_1 = \int_I A(x_1) dx_1, \end{aligned}$$

vilket visar satsen om itererad integration. \square

Anmärkning 5.5. Vi noterar att vi även kan genomföra itererad integration i omvänd ordning, det vill säga integrera med avseende på x_1 innerst (först) och med avseende på x_2 ytterst (sist). Formeln för itererad integration får då utseendet

$$\iint_D f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_I \left(\int_{D_{x_2}} f(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2, \quad (5.6)$$

där I nu är projektionen av D på x_2 -axeln och D_{x_2} är tvärsnittet av D parallellt med x_1 -axeln vid x_2 .

För att använda formeln (5.5) för itererad integration behöver man lära sig tekniken att, för ett givet område D , ställa upp gränserna i de båda enkelintegralerna i högerledet. Metoden är som följer.

- (i) Det rekommenderas starkt att du först ritar upp området D , om du inte är helt på det klara med hur D ser ut.
- (ii) Välj vilken variabel du vill integrera med avseende på först (innerst). Vilken som bör vara bäst lär man sig genom erfarenhet. Blir integralerna svåra, pröva då helt enkelt att integrera med avseende på den andra variabeln istället först. Väljer du x_2 använder du formeln (5.5) och väljer du x_1 använder du formeln (5.6).
- (iii) Antag att vi valt x_2 i steg (i). Skär då området D med linjer parallella med x_2 -axeln. Varje sådan linje bestäms av sin x_1 koordinat. Gränserna i den yttre integralen ska ange x_1 -värdena för de linjer som skär området D .
- (iv) Slutligen, för att bestämma gränserna i den inre integralen, fixerar du en linje, det vill säga ett x_1 -värde i den yttre integralen. Gränserna i den inre integralen ska nu ange var linjen skär området. Till skillnad från gränserna i den yttre integralen, som är fixa tal, är i allmänhet gränserna i den inre integralen uttryck i x_1 : olika linjer kan ju skära området D olika mycket!

Exempel 5.6. Låt oss beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D e^{-x_1} dx_1 dx_2,$$

där $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 ; 0 < x_2 < 2x_1 < 2\}$. (Vår funktion $f(x_1, x_2) = e^{-x_1}$ här råkar vara oberoende av x_2 .)

För att rita upp D , notera att D består av de punkter sådana att $0 < x_2, x_2 < 2x_1$ och $x_1 < 1$. Genom att rita upp x_1 -axeln ($0 = x_2$), linjen $x_2 = 2x_1$ och den vertikala linjen $x_1 = 1$, och tänka igenom på vilken sida linjerna var och en av olikheterna gäller, ser man att D är det inre av en triangel.

Välj till exempel att integrera först med avseende på x_2 (detta har fördelen att den inre integralen blir enkel att beräkna: e^{-x_1} är ju konstant med avseende på x_2 !). Vi ser att en vertikal linje skär D om och endast om $0 < x_1 < 1$. För ett sådant fixt x_1 ser vi vidare att linjen skär ut intervallet $(0, 2x_1)$ ur D . Detta ger räkningen

$$\begin{aligned} \iint_D e^{-x_1} dx_1 dx_2 &= \int_0^1 \left(\int_0^{2x_1} e^{-x_1} dx_2 \right) dx_1 = \int_0^1 2x_1 e^{-x_1} dx_1 \\ &= [2x_1(-e^{-x_1})]_0^1 - \int_0^1 2(-e^{-x_1}) dx_1 = (-2e^{-1} - 0) + 2[-e^{-x_1}]_0^1 \\ &= -2e^{-1} + 2(-e^{-1} + 1) = 2 - 4/e. \end{aligned}$$

Låt oss istället välja att integrera med avseende på x_1 först. Vi skär nu triangeln D med horisontella linjer och ser att en sådan skär D om och endast om $0 < x_2 < 2$. För ett fixt sådant x_2 skär linjen ut intervallet $(x_2/2, 1)$ ur D . (Har du inte ritat upp D kan detta vara svårt att se!) Detta ger räkningen

$$\begin{aligned} \iint_D e^{-x_1} dx_1 dx_2 &= \int_0^2 \left(\int_{x_2/2}^1 e^{-x_1} dx_1 \right) dx_2 = \int_0^2 [-e^{-x_1}]_{x_1=x_2/2}^1 dx_2 \\ &= \int_0^2 (-e^{-1} + e^{-x_2/2}) dx_2 = [-e^{-1}x_2 - 2e^{-x_2/2}]_0^2 \\ &= (-2e^{-1} - 2e^{-1}) - (-0 - 2) = 2 - 4/e. \end{aligned}$$

I detta exempel ger de två olika integrationsordningarna ungefär lika långa räkningar. Detta är emellertid inte alltid fallet, det kan ibland till och med vara omöjligt att genomföra den ena integrationsordningen medan den andra ordningen ger relativt smärtfria räkningar.

Vi avslutar detta kapitel med att härleda ytterligare en beräkningsformel för dubbelintegraler. Denna är dock bara tillämpbar på radiella funktioner på cirkulärt symmetriska områden, och kallas därför *radialformeln*. Vi härleder den här som ett specialfall av skivformeln, där vi skivar med horisontella plan som i (5.4). Detta är dock inte det vanliga sättet att visa radialformeln: det naturliga är att se radialformeln som ett specialfall av polärt variabelbyte (Sats 8.9) som vi beskriver i kapitel 8.

Definition 5.7. Betrakta en funktion $f(x_1, x_2)$ definierad på en cirkelring $a^2 < x_1^2 + x_2^2 < b^2$. Inför polära koordinater

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \varphi, \\ x_2 = r \sin \varphi. \end{cases}$$

Vi har på grund av trigonometriska ettan att $r^2 = x_1^2 + x_2^2$, så cirkelringen $a < r < b$ består av de punkter (x_1, x_2) för vilka avståndet r till origo är större än a och mindre än b .

Byt nu ut de cartesiska koordinaterna (x_1, x_2) i funktionen f mot polära koordinater (r, φ) . Om den resulterande funktionen $f(r, \varphi)$ inte beror på φ , skriver vi $f(r)$ och säger att f *radiellt symmetrisk* eller att f är en *radiell funktion*.

Exempel på radiella funktioner är $f(x_1, x_2) = e^{-x_1^2 - x_2^2} = e^{-r^2} = f(r)$ och $f(x_1, x_2) = 1/\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 1/r = f(r)$. Däremot är till exempel $f(x_1, x_2) = e^{-x_1} = e^{-r \cos \varphi} = f(r, \varphi)$ inte radiellt symmetrisk så vi kan inte använda radialformeln i exempel 5.6. Omvänt, givet en envariabelfunktion $f(r)$ definierad för $r \geq 0$ kan vi konstruera motsvarande radiella funktion genom att sätta

$$f(x_1, x_2) := f\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right).$$

Till exempel genererar envariabelfunktionen $f(r) = e^{-r^2}$ den radiellt symmetriska tvåvariabelfunktionen $f(x_1, x_2) = e^{-(\sqrt{x_1^2 + x_2^2})^2} = e^{-x_1^2 - x_2^2}$. Funktionsytan till tvåvariabelfunktionen $f(x_1, x_2)$ fås därför från funktionskurvan till $f(r)$ genom att rotera denna runt den vertikala axeln. Vi ser speciellt att nivåkurvorna $f(x_1, x_2) = C$ är cirkelformade om f är en radiell funktion.

Sats 5.8 (Radialformeln). *Låt $f(x_1, x_2) = f(r)$ vara en kontinuerlig och begränsad funktion som är radiellt symmetrisk och definierad på cirkelringen $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 ; a^2 < x_1^2 + x_2^2 < b^2\}$. Då är*

$$\iint_D f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 2\pi \int_a^b f(r)r dr, \quad (5.7)$$

där den så kallade *Jacobifaktorn* r ej är att förglömma.

Bevis. Vi antar för enkelhets skull att envariabelfunktionen $f(r) : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ är en strikt växande och positiv funktion, och att både f och f^{-1} är kontinuerligt deriverbara funktioner. Vi gör antagandet att f är strikt växande eftersom vi i beviset här med hjälp av skivformeln behöver ha tillgång till den inversa funktionen $f^{-1} : (f(a), f(b)) \rightarrow (a, b)$. Radialformeln (5.7) gäller dock utan detta antagande, vilket kan visas genom uppstyckning av området i mindre cirkelringar där $f(r)$ är monoton och genom approximation av en allmän kontinuerlig funktion med en kontinuerligt deriverbar sådan. Vi avstår dock från dessa detaljer här eftersom vi ska visa radialformeln i det allmänna fallet i kapitel 8 med andra metoder.

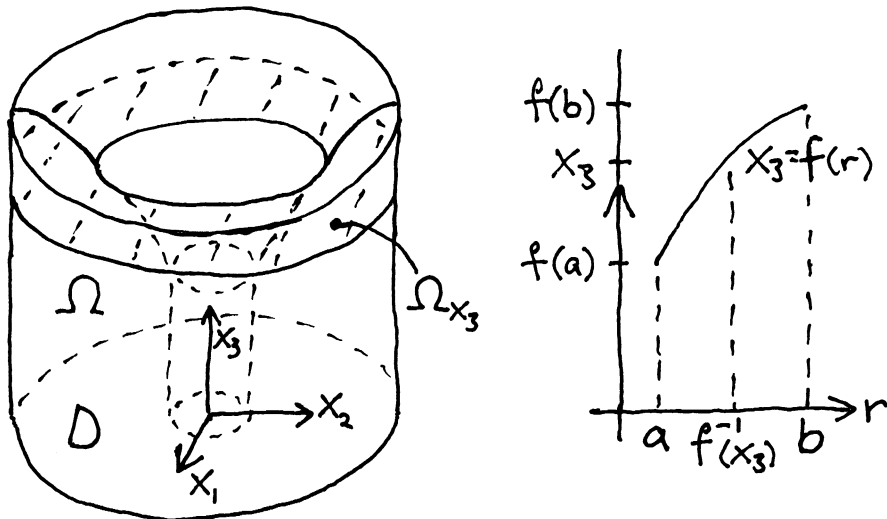
Betrakta subgrafan

$$\Omega := G_D(f) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 ; a^2 < x_1^2 + x_2^2 < b^2, 0 < x_3 < f(x_1, x_2)\}.$$

Enligt skivformeln (5.4) är

$$\iint_D f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = |\Omega| = \int_0^{f(b)} A(x_3) dx_3,$$

där $A(x_3)$ betecknar arean av tvärsnittet Ω_{x_3} på höjden x_3 . Vi ser att varje sådant



tvärsnitt är en cirkelring och dess area är

$$A(x_3) = \begin{cases} \pi b^2 - \pi a^2, & \text{då } 0 < x_3 \leq f(a), \\ \pi b^2 - \pi (f^{-1}(x_3))^2, & \text{då } f(a) < x_3 < f(b). \end{cases}$$

Detta ger att

$$\begin{aligned} \iint_D f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 &= \int_0^{f(a)} \pi(b^2 - a^2) dx_3 + \int_{f(a)}^{f(b)} \pi(b^2 - (f^{-1}(x_3))^2) dx_3 \\ &= \pi b^2 f(b) - \pi a^2 f(a) - \pi \int_{f(a)}^{f(b)} (f^{-1}(x_3))^2 dx_3 = \int_{x_3 = f(a)}^{x_3 = f(b)} \pi(b^2 - r^2) / \\ &= \pi b^2 f(b) - \pi a^2 f(a) - \pi \int_a^b r^2 f'(r) dr \\ &= \pi b^2 f(b) - \pi a^2 f(a) - \pi \left([r^2 f(r)]_a^b - \int_a^b 2r f(r) dr \right) = 2\pi \int_a^b f(r) r dr, \end{aligned}$$

vilket visar radialformeln under de extra antagandena. \square

Exempel 5.9. Betrakta den radiella funktionen

$$f(x_1, x_2) = \frac{\sin(\sqrt{x_1^2 + x_2^2})}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad D = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 ; x_1^2 + x_2^2 < (2\pi)^2\}.$$

Enligt radialformeln är

$$\iint_D f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 2\pi \int_0^{2\pi} \frac{\sin(r)}{r} r dr = 2\pi [-\cos(r)]_0^{2\pi} = 0.$$

Alltså, om vi ser f 's graf som en mexikanarhatt, så är vattenvolymen som kan ansamlas uppe på brättet $\{\pi < r < 2\pi, f(r) < x_3 < 0\}$ lika stor som volymen uppe i övre delen av det inre av hatten $\{0 \leq r < \pi, 0 < x_3 < f(r)\}$.

Anmärkning 5.10. Radialformeln är ett specialfall av en mer allmän teknik som kallas *integration med avseende på nivåkurvor*. I denna betraktar man en mer allmän funktion $r(\mathbf{x})$ än $r(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ som användes i radialformeln. Man får då formeln

$$\iint_D f(r(\mathbf{x})) dx_1 dx_2 = \int_a^b f(r)v'(r) dr,$$

där $v(r) := |D_r|$ och $D_r := \{\mathbf{x} \in D ; r(\mathbf{x}) < r\}$ och det antas att $D_a = \emptyset$ och $D_b = D$. Denna formel används för att integrera funktioner som är konstanta på på varje nivåkurva till $r(\mathbf{x})$, precis som radialformeln används för att integrera funktioner som är konstanta på cirklar kring origo. I radialformeln var $D_r = \{\mathbf{x} ; a^2 < x_1^2 + x_2^2 < r^2\}$ och därmed $v'(r) = 2\pi r$.

6 Generaliserade positiva integraler

I detta kapitel betraktar vi generaliserade integraler $\iint_D f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2$, det vill säga vi kräver nu inte längre att funktionen f ska vara begränsad och att mängden D ska vara begränsad. Vi kräver dock fortfarande att mängden D ska vara öppen och att funktionen f ska vara positiv och kontinuerlig (eller åtminstone ha öppen subgraf). Det visar sig nämligen att teorin för generaliserade integraler blir något mer komplicerad i fallet då f tillåts växla tecken. Teckenväxlande generaliserade integraler behandlas därför enbart i Bilaga A.

Till skillnad från enkelintegraler kan dubbelintegraler vara generaliserade på ett flertal olika sätt.

Exempel 6.1. Betrakta följande generaliserade integraler.

(i)

$$\iint_D \frac{1}{|\mathbf{x}|^a} dx_1 dx_2, \quad D = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 ; 0 < |\mathbf{x}| < 1\},$$

där $a > 0$. Denna är generaliserad i randpunkten $\mathbf{0}$ på grund av att funktionen ej är begränsad vid denna punkt.

(ii)

$$\iint_D \frac{1}{x_1^a} dx_1 dx_2, \quad D = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 ; 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\},$$

där $a > 0$. Denna är generaliserad på hela randlinjen $x_1 = 0, 0 \leq x_2 \leq 1$ på grund av att funktionen ej är begränsad vid denna linje.

(iii)

$$\iint_D \frac{1}{|\mathbf{x}|^a} dx_1 dx_2, \quad D = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 ; |\mathbf{x}| > 1\}.$$

Denna är generaliserad på grund av att integrationsområdet ej är begränsat.

(iv)

$$\iint_D \frac{1}{x_1^a} dx_1 dx_2, \quad D = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 ; x_1 > 1, 0 < x_2 < 1/x_1^2\}.$$

Även denna är generaliserad på grund av att integrationsområdet ej är begränsat. (Men notera att D har ändlig area!)

En av fördelarna med vår integraldefinition jämförfört med Riemannintegralen är att teorin här i kapitel 2, 3 och 5 går igenom i princip oförändrad även för generaliserade integraler. Låt oss peka ut vad som är nytt vad gäller mått och integral.

Mått: Givet en öppen mängd $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ (möjligen obegränsad) ska vi definiera dess mått. Som tidigare gör vi detta med hjälp av en speciell uttömmande svit för Ω , den kanoniska sviten $(U_j)_{j=0}^\infty$. Denna konstrueras som tidigare, med ett tillägg. Vi vill, även om Ω är obegränsad, att varje mängd U_j i den kanoniska sviten ska bestå av ett ändligt antal kuber. Detta har till följd att det slutna höljet \overline{U}_j blir en kompakt mängd (vilket till exempel användes i beviset för vår grundläggande Sats 2.13). Låt till exempel $\Omega = \mathbf{R}^3$ vara hela rummet. Då kommer i steg (ii) i konstruktionen av U_j uppenbarligen alla kuberna väljas och vi får $U_j = \mathbf{R}^3$. För att förhindra detta, använder vi för obegränsade mängder Ω istället följande urvalskriterium:

(ii') För att bilda U_j , välj ut de kuber Q med sidlängd 2^{-j} från steg (i) som ligger i kuben

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 ; |x_1| < j, |x_2| < j, |x_3| < j\}$$

och som är sådana att $\overline{Q} \subset \Omega$, inklusive sidytor, kanter och hörn.

Observera att det extra kravet blir svagare och svagare ju större j blir (vi kunde här använt vilket växande följd a_j sådan att $\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = \infty$ som helst istället för $a_j = j$), och man inser att den kanoniska sviten, konstruerad på detta modifierade sätt, också är en uttömmande svit för Ω . Som tidigare definierar vi måttet av Ω som

$$|\Omega| := \lim_{j \rightarrow \infty} |U_j|.$$

Observera att det nu är fullt möjligt att $|\Omega| = \infty$.

Integral: En generaliserad integral av en positiv funktion kan nu definieras som tidigare.

Definition 6.2. Låt $D \subset \mathbf{R}^2$ vara öppen och låt $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ vara en positiv funktion med öppen subgraf $G_D(f)$. Då definieras integralen av f över D som

$$\iint_D f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 := |G_D(f)|.$$

Om $\iint_D f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 < \infty$ säger vi att integralen är *konvergent*. Är integralen inte konvergent säger vi att den är *divergent*.

Vi tillåter här även vår funktion $f \geq 0$ att anta värdet ∞ . För dess subgraf $G_D(f)$ innebär $f(a_1, a_2) = \infty$ att hela halvlinjen

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 ; x_1 = a_1, x_2 = a_2, x_3 > 0\} \subset G_D(f).$$

Exempel 6.3. Den öppna och obegränsade mängden $\{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 ; |x_1| < 1, 0 < x_2 < 1/|x_1|\}$ är subgraf för envariabelfunktionen

$$f(x_1) = \begin{cases} 1/|x_1|, & 0 < |x_1| < 1, \\ \infty, & x_1 = 0, \end{cases}$$

definierad på intervallet $(-1, 1)$.

Tvåvariabelfunktionen som är konstant ∞ på hela \mathbf{R}^2 har som subgraf halvrummet $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 ; x_3 > 0\}$.

Teorin i kapitel 2, 3 och 5 går nu igenom för godtyckliga öppna mängder och positiva funktioner med öppen subgraf. Eftersom vi i detta kapitel bara betraktar positiva funktioner är det bara teorin till och med Följdsats 3.7 i kapitel 3 som är relevant här.

Sats 3.5 (stavformeln) och Sats 5.1 (skivformeln) gäller som de står för godtyckliga öppna mängder.

Följdsats 5.4 (itererad integration) gäller om förutsättningen ” f kontinuerlig och begränsad” byts ut mot ” $f \geq 0$ och kontinuerlig” (eller mer allmänt om $f \geq 0$ har öppen subgraf). Vidare förenklas beviset genom att del (ii) stryks. Vi får alltså följande sats för generaliserade integraler av positiva funktioner.

Sats 6.4 (Tonelli). *Låt $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ vara en positiv och kontinuerlig funktion på en öppen mängd $D \subset \mathbf{R}^2$. Definiera de öppna mängderna $I \subset \mathbf{R}$ och $D_{x_1} \subset \mathbf{R}$ samt envariabelfunktionerna f_{x_1} och A som i Följdsats 5.4. Då är f_{x_1} kontinuerlig och A har öppen subgraf, och $\iint_D f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_I A(x_1) dx_1$, det vill säga*

$$\iint_D f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_I \left(\int_{D_{x_1}} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1. \quad (6.1)$$

Denna formel för itererad integration av positiva funktioner gäller oavsett om integralerna är konvergenta eller ej: integralen i högerledet är konvergent om och endast om integralen $\int_I A(x_1) dx_1$ i högerledet är konvergent. Detta kan gälla trots att $A(x_1)$ är oändlig i vissa punkter!

Även Sats 5.8 (radialformeln) gäller under förutsättningen att f är positiv och kontinuerlig (men givetvis fortfarande radiell och definierad på en, möjligen obegränsad, cirkelring).

Förutsatt att $f \geq 0$ kan vi nu räkna som vanligt med itererad integration och radialformeln trots att integralen är generaliserad. Bli resultatet ändligt är integralen konvergent, och blir resultatet ∞ är integralen divergent.

Exempel 6.5. Vi vill beräkna den generaliserade integralen $\iint_D \frac{1}{(|x_1| + |x_2|)^{3/2}} dx_1 dx_2$, där $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 ; |x_1| < 1, |x_2| < 1, (x_1, x_2) \neq (0, 0)\}$. Med itererad integration får vi

$$\iint_D \frac{1}{(|x_1| + |x_2|)^{3/2}} dx_1 dx_2 = \int_{-1}^1 \left(\int_{D_{x_1}} \frac{1}{(|x_1| + |x_2|)^{3/2}} dx_2 \right) dx_1,$$

där $D_{x_1} = (-1, 1)$ om $0 < |x_1| < 1$ och $D_{x_1} = (-1, 0) \cup (0, 1)$ om $x_1 = 0$. På grund av symmetri blir den inre integralen

$$\begin{aligned} A(x_1) &= 2 \int_0^1 \frac{1}{(|x_1| + x_2)^{3/2}} dx_2 = 2[-2(|x_1| + x_2)^{-1/2}]_{x_2=0}^1 \\ &= \begin{cases} 4(|x_1|^{-1/2} - (|x_1| + 1)^{-1/2}), & 0 < |x_1| < 1, \\ \infty, & x_1 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Återigen på grund av symmetri får vi genom att beräkna den yttre integralen

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{1}{(|x_1| + |x_2|)^{3/2}} dx_1 dx_2 &= 2 \int_0^1 4(x_1^{-1/2} - (x_1 + 1)^{-1/2}) dx_1 \\ &= 8[2\sqrt{x_1} - 2\sqrt{x_1 + 1}]_0^1 = 16(2 - \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Denna räkning visar att en dubbelintegral kan vara konvergent trots att den inre integralen vid itererad integration antar värdet ∞ i enstaka punkter. (Det är också exempel som detta som är huvudanledningen till att tillåta ∞ som funktionsvärde.) Om det känns olustigt att integrera funktionen $A(x_1)$, som antar värdet ∞ i $x_1 = 0$, kan man motivera räkningen ovan på följande sätt. Trunkera funktionen kring $x_1 = 0$ genom att sätta $A_j(x_1) := \min(A(x_1), j)$ (vi hugger alltså av toppen av A 's graf). Vi beräknar sedan $\int_{-1}^1 A_j$. Eftersom $A_j \nearrow A$ följer av Lemma 3.4 att $\int_{-1}^1 A_j \rightarrow \int_{-1}^1 A$.

Övning 6.6. Visa att de generaliserade integralerna i exempel 6.1 är konvergenta för följande värden på a och då har följande värde.

- (i) Är konvergent då $a < 2$ med värde $2\pi/(2 - a)$.
- (ii) Är konvergent då $a < 1$ med värde $1/(1 - a)$.
- (iii) Är konvergent då $a > 2$ med värde $2\pi/(a - 2)$.
- (iv) Är konvergent då $a > -1$ med värde $1/(1 + a)$.

Om det känns olustigt att räkna med generaliserade integraler kan man med följande tvilling till Lemma 3.4 beräkna den generaliserade integralen genom att först trunkera området D till mindre områden D_j som bildar en uttömmande svit för D och som är sådana att integralerna $\iint_{D_j} f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2$ ej är generaliserade, varpå man låter $j \rightarrow \infty$.

Lemma 6.7. Låt $D \subset \mathbf{R}^2$ vara en öppen mängd och låt $(D_j)_{j=0}^\infty$ vara en uttömmande svit för D . Antag att $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ är en positiv funktion som har öppen subgraf över varje D_j . Då har även f öppen subgraf över D och

$$\iint_{D_j} f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \longrightarrow \iint_D f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2, \quad \text{då } j \longrightarrow \infty.$$

Bevis. Enligt definitionen av dubbelintegralen ser vi att vi behöver visa att

$$|G_{D_j}(f)| \longrightarrow |G_D(f)|.$$

Enligt förutsättningarna är varje mängd $G_{D_j}(f)$ öppen. Vidare följer av att $(D_j)_{j=0}^\infty$ är en uttömmande svit för D att $(G_{D_j}(f))_{j=0}^\infty$ är en uttömmande svit för $G_D(f)$ (varför?) och att denna är öppen. Genom att använda Sats 2.13 får vi därför att

$$\iint_{D_j} f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 = |G_{D_j}(f)| \longrightarrow |G_D(f)| = \iint_D f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2,$$

vilket skulle visas. □

Exempel 6.8. I exempel 6.1(i) är det naturligt att trunkera området till $D_j = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 ; 1/j < |\mathbf{x}| < 1\}$. Vi beräknar med hjälp av radialformeln den icke-generaliserade integralen

$$\iint_{D_j} \frac{1}{|\mathbf{x}|^a} dx_1 dx_2 = 2\pi \int_{1/j}^1 r^{1-a} dr \longrightarrow \begin{cases} 2\pi/(2-a), & \text{då } a < 2, \\ \infty, & \text{då } a \geq 2. \end{cases}$$

Eftersom $(D_j)_{j=1}^\infty$ är en uttömmande svit för D kan vi från Lemma 6.7 dra slutsatsen att integralen över hela D är konvergent om och endast om $a < 2$ och då har värdet $2\pi/(2-a)$.

För en generaliserad integral är det ibland inte nödvändigt att beräkna dess exakta värde. En viktig fråga är huruvida integralen är konvergent eller divergent. Dessutom kan integralens exakta värde vara svårt att beräkna och då är det användbart att ha tekniker för att bestämma om integralen är konvergent eller inte, utan att behöva beräkna dess exakta värde. För generaliserade integraler av positiva funktioner är det följande *jämförelsekriterium* som man främst använder sig av.

Sats 6.9 (Jämförelsekriteriet). *Låt $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ och $g : D \rightarrow \mathbf{R}$ vara två positiva funktioner med öppna subgrafer. Då gäller att*

- (i) *om $\iint_D g(\mathbf{x}) dx_1 dx_2$ är konvergent och $f \leq g$, så är även $\iint_D f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2$ konvergent, och*
- (ii) *om $\iint_D g(\mathbf{x}) dx_1 dx_2$ är divergent och $g \leq f$, så är även $\iint_D f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2$ divergent.*

Bevis. Notera att (i) och (ii) säger precis samma sak (varför?). För att visa (i) noterar vi att $0 \leq f \leq g$ är ekvivalent med $G_D(f) \subset G_D(g)$, vilket medför att

$$\iint_D f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 = |G_D(f)| \leq |G_D(g)| = \iint_D g(\mathbf{x}) dx_1 dx_2.$$

Detta visar jämförelsekriteriet (varför?). □

I jämförelsekriteriet är det integralen av f som vi vill avgöra konvergensen hos, och g är en "enklare" hjälpfunktion som vi jämför med.

Exempel 6.10. Vi vill avgöra för vilka värden på $a > 0$ som

$$\iint_{0 < |\mathbf{x}| < 1} \frac{1}{\arctan(|\mathbf{x}|^a)} dx_1 dx_2$$

konvergerar. Notera att integralen är generaliserad i $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ och skriv $t = |\mathbf{x}|^a$. Nära $t = 0$ vet vi från envariabelanalysen att $\arctan(t) \approx t$, och på grund av exempel 6.1(i) är det därför troligt att vår integral är konvergent då $a < 2$. För att visa detta använder vi oss av jämförelsekriteriet.

(1) Låt först $a \geq 2$. Vi vill visa att vår integral av $f(\mathbf{x}) = 1/\arctan(|\mathbf{x}|^a)$ är divergent och använder oss därför av (ii) i jämförelsekriteriet med

$$g(\mathbf{x}) = 1/|\mathbf{x}|^a.$$

Eftersom $\arctan(t) \leq t$ för $t \geq 0$ (rita!) ser vi att $f \geq g$. Detta visar divergensen.

(2) Låt nu $a < 2$ och försök använda (i) i jämförelsekriteriet för att visa att integralen av f är konvergent. Tyvärr gäller som vi såg i (1) inte $f \leq g$ utan $f \geq g$. Detta problem går dock lätt att lösa: kom ihåg standardgränsvärdet $\lim_{t \rightarrow 0} \arctan(t)/t = 1$. Detta visar att för små $t = |\mathbf{x}|^a$, vilket är vad vi är intresserade av, så är $f \lesssim g$. För att göra detta rigoröst, kan vi göra så här. Eftersom $\arctan(t)/t \rightarrow 1$ då $t \rightarrow 0$, finns speciellt $\delta > 0$ så att $\arctan(t)/t \geq 1/2$ då $0 < t < \delta$, det vill säga $\arctan(t) \geq t/2$ för dessa t . (Genom en funktionsundersökning av $\arctan t$ kan man mer precist visa att $\arctan(t) \geq \frac{\pi}{4}t$ för alla $0 \leq t \leq 1$.) Vi ser nu att $f(\mathbf{x}) \leq 2g(\mathbf{x})$ då $0 < |\mathbf{x}| < \delta^{1/a}$. Eftersom integralen bara är generaliserad i $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, räcker det att visa att

$$\iint_{0 < |\mathbf{x}| < \delta^{1/a}} \frac{1}{\arctan(|\mathbf{x}|^a)} dx_1 dx_2$$

är konvergent. Uppenbarligen har även den något större funktionen $2g$ en konvergent integral över $\{\mathbf{x} ; 0 < |\mathbf{x}| < \delta^{1/a}\}$. Enligt jämförelsekriteriet visar detta konvergen- sen av f :s integral.

7 Nollmängder och uppdelning av integraler

Ämnet för detta kapitel är nollmängder, det vill säga mängder med mått 0. En typisk nollmängd i \mathbf{R}^3 är en yta (volym=0), i planet en kurva (area=0) och på linjen punkter (längd=0). Vid integration är nollmängder försumbara. Kom ihåg från envariabelanalysen att enkelintegralen

$$\int_{[a,b]} f(x) dx = \int_{(a,b)} f(x) dx.$$

Detta är sant eftersom tvåpunktsmängden $\{a, b\} = \partial(a, b) = \partial[a, b]$ är en nollmängd, och underförstås till exempel i notationen $\int_a^b f(x) dx$.

Definition 7.1. En mängd N (i rummet, planet eller på linjen) sägs vara en (Lebesgue-) *nollmängd* om för varje $\epsilon > 0$ finns en öppen mängd Ω sådan att $N \subset \Omega$ och $|\Omega| \leq \epsilon$.

Anmärkning 7.2. Huruvida till exempel en plan mängd är en nollmängd beror på om den ses som en delmängd av planet eller rummet. Till exempel enhetsskivan är ingen nollmängd i planet (den har ju arean π). Däremot är $N := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 ; x_1^2 + x_2^2 < 1, x_3 = 0\}$ en nollmängd i rummet (den kan stängas in i en öppen cylinder Ω med radie 1 och höjd 2ϵ , vilkens volym kan göras godtyckligt liten).

För att visa att en given mängd är en nollmängd används framförallt följande.

Sats 7.3. (i) Om N är en nollmängd så är varje delmängd $N' \subset N$ också en nollmängd.

(ii) Om N_1, N_2, N_3, \dots är en uppräknelig (eller ändlig) följd av nollmängder, så är unionen $N := \bigcup_{j=1}^{\infty} N_j$ också en nollmängd.

(iii) Om $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ är en kontinuerlig funktion på en öppen mängd D så är dess graf

$$N := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 ; (x_1, x_2) \in D, x_3 = f(x_1, x_2)\}$$

en nollmängd. Detta är även sant om f är en funktion av variablerna (x_1, x_3) eller (x_2, x_3) . Även grafen till en kontinuerlig envariabelfunktion på en öppen mängd är en nollmängd i \mathbf{R}^2 .

Bevis. Beviset av (i) lämnas som övning åt läsaren. För att visa (ii) låter vi $\epsilon > 0$ vara givet och tar för varje heltal $j \geq 1$ en öppen mängd Ω_j sådan att $N_j \subset \Omega_j$ och $|\Omega_j| \leq 2^{-j}\epsilon$. Detta kan göras eftersom varje N_j är en nollmängd. Bilda den öppna mängden $\Omega := \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j$. Genom upprepad användning av Följdsats 2.15 ser vi att

$$|\Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_k| \leq |\Omega_1| + \dots + |\Omega_k| \leq (1 - 2^{-k})\epsilon.$$

(Visa den sista olikheten genom att använda formeln för den geometriska summan!) Vidare bildar de ändliga unionerna $(\Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_k)_{k=1}^{\infty}$ en uttömmande svit för den uppräkneliga unionen Ω . Sats 2.13 visar därför att

$$|\Omega| = \lim_{k \rightarrow \infty} |\Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_k| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} (1 - 2^{-k})\epsilon = \epsilon.$$

Eftersom $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j$ är en öppen omgivning av $N = \bigcup_{j=1}^{\infty} N_j$ följer det att N är en nollmängd.

(iii) Vi kan anta att D är en begränsad mängd. Om så ej är fallet skriver vi nämligen $D = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j$ som en uppräknelig union av öppna och begränsade mängder D_j . Om N_j betecknar grafen av f över D_j så följer det att $N = \bigcup_{j=1}^{\infty} N_j$. Har vi nu visat att varje N_j är en nollmängd så följer av (ii) att N är en nollmängd.

Givet $\epsilon > 0$ och en kontinuerlig funktion $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ på en öppen och begränsad mängd $D \subset \mathbf{R}^2$, stänger vi in dess graf N i mängden

$$\Omega := \{(\mathbf{x}, x_3) \in \mathbf{R}^3 ; |x_3 - f(\mathbf{x})| < \epsilon\}.$$

För att visa att Ω är en öppen mängd skriver vi

$$\Omega = \{(\mathbf{x}, x_3) \in \mathbf{R}^3 ; x_3 < f(\mathbf{x}) + \epsilon\} \cap \{(\mathbf{x}, x_3) \in \mathbf{R}^3 ; x_3 > f(\mathbf{x}) - \epsilon\}.$$

Att den första mängden är öppen följer på samma sätt som i Lemma 2.3 (skillnaden är vi här inte kräver att $x_3 > 0$). Analogt visas också att den andra mängden är en öppen mängd, och sålunda är även Ω öppen.

För att uppskatta måttet av Ω använder vi stavformeln (3.1), vilken ger

$$|\Omega| = \iint_D 2\epsilon \, dx_1 dx_2 = 2\epsilon|D|,$$

där vi även använt Sats 2.10. Eftersom D är begränsad är $|D| < \infty$ och därför kan $|\Omega|$ göras godtyckligt litet genom att välja ϵ litet. Detta visar att f 's graf är en nollmängd. \square

Exempel 7.4. Låt oss med Sats 7.3 visa att enhetsfären $N = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 ; |\mathbf{x}| = 1\}$ är en nollmängd. Betrakta den kontinuerliga funktionen $f(x_1, x_2) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$ definierad på den öppna enhetsskivan $x_1^2 + x_2^2 < 1$. Då är N en delmängd av till exempel unionen av graferna till f , $-f$ och den konstanta funktionen 0 (vars graf är x_1x_2 -planet, och speciellt innehåller enhetscirkeln där). Genom att använda (i), (ii) och (iii) i satsen ser vi att N är en nollmängd.

Lemma 7.5. *Låt N vara en nollmängd i \mathbf{R}^2 . Då är mängden*

$$N \times \mathbf{R} := \{(\mathbf{x}, x_3) \in \mathbf{R}^3 ; \mathbf{x} \in N, x_3 \in \mathbf{R}\}$$

en nollmängd i \mathbf{R}^3 .

Bevis. Genom att skriva \mathbf{R} som en union av begränsade intervall ser vi av Sats 7.3(ii) att det räcker att visa att $N \times (a, b)$ är en nollmängd. Eftersom N antas vara en plan nollmängd finns det, givet $\epsilon > 0$, en öppen plan mängd D sådan att $N \subset D$ och $|D| < \epsilon$. Betrakta nu den öppna mängden (varför?) $D \times (a, b)$ som innehåller $N \times (a, b)$. Av Sats 2.10 följer att

$$|D \times (a, b)| = (b - a)|D| < (b - a)\epsilon,$$

vilket kan göras godtyckligt litet genom att välja ϵ litet. Detta visar att $N \times (a, b)$ är en nollmängd. \square

Vi visar nu att nollmängder är försumbara vad gäller mått och integration.

Sats 7.6. *Låt $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_k \cup N$ vara en öppen mängd, där $\Omega_1, \dots, \Omega_k$ är öppna och parvis disjunkta mängder, det vill säga $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ då $i \neq j$, och N är en nollmängd. Då är*

$$|\Omega| = |\Omega_1| + |\Omega_2| + \dots + |\Omega_k|.$$

Bevis. Låt $\epsilon > 0$ och tag en öppen mängd $\tilde{\Omega}$ sådan att $N \subset \tilde{\Omega}$ och $|\tilde{\Omega}| < \epsilon$. Eftersom

$$\Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_k \subset \Omega \subset \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_k \cup \tilde{\Omega},$$

följer det genom upprepad användning av Följdsats 2.15 att

$$|\Omega_1| + \dots + |\Omega_k| \leq |\Omega| \leq |\Omega_1| + \dots + |\Omega_k| + \epsilon.$$

Låter vi här $\epsilon \rightarrow 0$ följer satsen. \square

Följdsats 7.7. Antag att $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ är en kontinuerlig och begränsad funktion på en öppen och begränsad mängd $D \subset \mathbf{R}^2$. Antag vidare att D kan delas upp

$$D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_k \cup N,$$

där D_1, \dots, D_k är öppna och parvis disjunkta mängder och N är en nollmängd. Då är

$$\iint_D f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 = \iint_{D_1} f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 + \dots + \iint_{D_k} f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2.$$

Detta gäller även för generaliserade integraler om vi antar att $f \geq 0$.

Bevis. Genom den vanliga reduktion genom uppdelning av f i positiv och negativ del, ser vi att vi i fallet av en icke-generaliserad integral kan anta även där att $f \geq 0$. Det följer av förutsättningarna (hur?) att vi har uppdelningen

$$G_D(f) = G_{D_1}(f) \cup \dots \cup G_{D_k}(f) \cup \tilde{N}$$

av subgrafan, där $\tilde{N} \subset N \times \mathbf{R}$. Enligt Lemma 7.5 är $N \times \mathbf{R}$ en nollmängd och detsamma gäller därför för \tilde{N} . Sats 7.6 ger nu att

$$|G_D(f)| = |G_{D_1}(f)| + \dots + |G_{D_k}(f)|,$$

vilket skulle visas. □

Anmärkning 7.8. Genom att använda Sats 2.13 på liknande sätt som i beviset av Sats 7.3(ii) är det enkelt att visa att satsen och hjälpsatsen ovan även gäller för en uppdelning av mängden i oändligt många öppna delmängder samt en nollmängd, det vill säga då $k = \infty$.

Följdsats 7.7 ger oss en användbar "klippa-och-klistra" teknik för att beräkna integraler. Följande exempel visar hur man kan använda den.

Exempel 7.9. Vi beräknar dubbelintegralen

$$\iint_D (x_1^2 + x_2^2) dx_1 dx_2, \quad D = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 ; |x_1| < 1, |x_2| < 1, x_1^2 + x_2^2 > 1\},$$

(rita upp området!) genom att lägga till och dra ifrån hålet. Inför mängderna

$$D_1 := \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 ; |x_1| < 1, |x_2| < 1\},$$

$$D_2 := \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 ; x_1^2 + x_2^2 < 1\},$$

$$N := \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 ; x_1^2 + x_2^2 = 1, x_1 \neq 0, x_2 \neq 0\},$$

så att $D_1 = D \cup D_2 \cup N$, där N är en nollmängd. Följdsats 7.7 visar därför att

$$\iint_D (x_1^2 + x_2^2) dx_1 dx_2 = \iint_{D_1} (x_1^2 + x_2^2) dx_1 dx_2 - \iint_{D_2} (x_1^2 + x_2^2) dx_1 dx_2.$$

Den första integralen, eftersom D_1 är en axelparallell kvadrat, är enkel att beräkna med itererad integration och har värdet $8/3$ (visa!) medan den andra integralen, eftersom D_2 är enhetsskivan och funktionen är radiell, enkelt beräknas med radialformeln till $\pi/2$ (visa!). Vår sökta integral har alltså värdet $8/3 - \pi/2$. (Kontroll: funktionen var positiv så $8/3 - \pi/2 > 0$, eller hur?)

Med hjälp av nollmängdsbegreppet, kan vi naturligt definiera integraler av funktioner som inte är helt kontinuerliga över mängder något mer generella än de öppna.

Definition 7.10. Låt $f : E \rightarrow \mathbf{R}$ vara en positiv funktion definierad på en mängd $E \subset \mathbf{R}^2$. Antag att $E = D \cup N$ där D är öppen och N är en nollmängd, och att restriktionen $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ är kontinuerlig. Då definierar vi dubbelintegralen av f över E som

$$\iint_E f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 := |G_D(f)|.$$

Som tidigare definierar vi integralen av en teckenväxlande funktion, under förutsättningen att f och E även är begränsade, genom uppdelning $f = f^+ - f^-$ i positiv och negativ del som

$$\iint_E f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 := |G_D(f^+)| - |G_D(f^-)|.$$

Exempel 7.11. Med denna definition är till exempel alltså

$$\iint_{0 \leq x_1 \leq 1, 0 < x_2 < 1} x_1 x_2 dx_1 dx_2 = \iint_{0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1} x_1 x_2 dx_1 dx_2,$$

och om $f(\mathbf{x}) = \begin{cases} x_1^2, & \text{då } |\mathbf{x}| \leq 1, \\ 1/(x_1^2 + x_2^2), & \text{då } 1 < |\mathbf{x}| < 2, \end{cases}$ är

$$\iint_{|\mathbf{x}| < 2} f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 = \iint_{|\mathbf{x}| < 1} x_1^2 dx_1 dx_2 + \iint_{1 < |\mathbf{x}| < 2} 1/(x_1^2 + x_2^2) dx_1 dx_2.$$

Vi ska inte vidare utveckla detta mot ännu mer allmänna mängder och funktioner eftersom detta är ämnet för en kurs i Lebesgueintegrationsteori. I stället fortsätter vi att enbart integrera över öppna mängder eftersom vi i detta kapitel har lärt oss att nollmängder inte spelar någon roll när det gäller mått och integraler.

Vi avslutar detta kapitel med en sats som förberedelse för de följande kapitlen.

Definition 7.12. Antag att $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ är en funktion på en öppen och begränsad mängd $D \subset \mathbf{R}^2$. Antag vidare att D är uppdelad i delmängder

$$D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_k \cup N,$$

där D_1, \dots, D_k är öppna och parvis disjunkta mängder och N är en nollmängd. Antag vidare att för var och en av delmängderna D_j är vald en punkt $\mathbf{x}_j \in \overline{D_j} \cap D$. Då kallas summan

$$\sum_{j=1}^k f(\mathbf{x}_j) |D_j|$$

en *Riemannsumma* till f i D .

Motiveringen till att betrakta Riemannsummor är att, precis som för enkelintegralen, är dubbelintegralen ett gränsvärde av Riemannsummor då uppdelningen av D förfinas oändligt mycket.

Sats 7.13. Låt D vara en begränsad öppen mängd och antag att $f : \overline{D} \rightarrow \mathbf{R}$ är kontinuerlig på det slutna höljet av D . Då finns för varje $\epsilon > 0$ ett $\delta > 0$ sådant att

$$\left| \sum_{j=1}^k f(\mathbf{x}_j) |D_j| - \iint_D f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \right| \leq \epsilon$$

för varje Riemannsumma med uppdelning $D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_k \cup N$ så fin att diametern

$$\text{diam}(D_j) := \sup_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D_j} |\mathbf{y} - \mathbf{x}| \leq \delta,$$

för varje delmängd D_j . (Exakt vilka punkter \mathbf{x}_j vi väljer har alltså ingen betydelse här.) Vi skriver detta som att

$$\sum_{j=1}^k f(\mathbf{x}_j) |D_j| \longrightarrow \iint_D f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2$$

då uppdelningens finhet går mot noll.

Bevis. Enligt Följdsats 7.7 är

$$\iint_D f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 = \sum_{j=1}^k \iint_{D_j} f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2.$$

Eftersom D_j är liten och f är kontinuerlig är $f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}_j)$ då $\mathbf{x} \in D_j$. För att visa detta rigoröst behöver vi använda det faktum att f är likformigt kontinuerlig. Detta är sant eftersom f antas vara kontinuerlig på den kompakta (varför?) mängden \overline{D} , vilket medför att f är likformigt kontinuerlig på \overline{D} , och då speciellt på D . Låt nu $\epsilon > 0$. Eftersom D är begränsad är även $\epsilon/|D| > 0$, så det finns $\delta > 0$ sådant att

$$|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})| \leq \epsilon/|D|, \quad \text{för varje } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D \text{ sådana att } |\mathbf{y} - \mathbf{x}| \leq \delta.$$

Betrakta nu en Riemannsumma med uppdelning $D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_k \cup N$ så fin att $\text{diam}(D_j) \leq \delta$ för varje delmängd D_j . Då är enligt ovan $|f(\mathbf{x}_j) - f(\mathbf{x})| \leq \epsilon/|D|$ för varje $\mathbf{x} \in D_j$. Vi får

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^k f(\mathbf{x}_j) |D_j| - \iint_D f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \right| \\ &= \left| \sum_{j=1}^k \iint_{D_j} f(\mathbf{x}_j) dx_1 dx_2 - \sum_{j=1}^k \iint_{D_j} f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \right| \\ &= \left| \sum_{j=1}^k \iint_{D_j} (f(\mathbf{x}_j) - f(\mathbf{x})) dx_1 dx_2 \right| \leq \sum_{j=1}^k \iint_{D_j} |f(\mathbf{x}_j) - f(\mathbf{x})| dx_1 dx_2 \\ &\leq \sum_{j=1}^k \iint_{D_j} \frac{\epsilon}{|D|} dx_1 dx_2 = \sum_{j=1}^k \frac{\epsilon}{|D|} |D_j| = \epsilon, \end{aligned}$$

där vi har använt triangelolikheten, både för summor och integraler. Detta visar satsen. \square

8 Variabelbyten i dubbelintegraler

Precis som för enkelintegralen, kan vi även byta variabler i dubbelintegralen, vilket är huvudtekniken jämte itererad integration för att beräkna dubbelintegraler. Vi ska här presentera den allmänna formeln för variabelbyten i dubbelintegraler för att sedan bevisa den för de två vanligaste bytena: linjära variabelbyten och det polära variabelbytet. För beviset i det allmänna fallet (även för multipelintegraler) hänvisar vi till Böiers–Claesson [1].

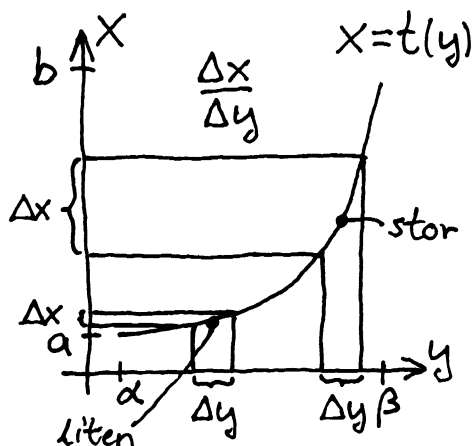
Låt oss börja med att skriva upp formeln för variabelbyte i enkelintegraler på ett sätt som lämpar sig för generalisering till dubbelintegralen. För att beräkna enkelintegralen $\int_a^b f(x) dx$ av en kontinuerlig och begränsad funktion f antar vi givet en variabelbytesfunktion $t : (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$ som vi ska använda för att byta den ”gamla” variabeln $x = t(y)$ mot den ”nya” variabeln y . För att t ska ha en invers funktion $t^{-1} : (a, b) \rightarrow (\alpha, \beta)$ antar vi att t är strängt monotont, det vill säga strängt växande eller strängt avtagande. Vidare kräver vi att t och t^{-1} är kontinuerligt deriverbara. Då gäller variabelbytesformeln

$$\int_{(a,b)} f(x) dx = \int_{(\alpha,\beta)} f(t(y)) \left| \frac{dt}{dy} \right| dy. \quad (8.1)$$

Notera absolutbeloppen runt derivatan. Att högerledet är detsamma som i envariabelanalysen ser vi så här. Om t är en växande funktion är derivatan positiv och högerledet blir därför $\int_{\alpha}^{\beta} f(t(y)) \frac{dt}{dy} dy$ som vanligt. Är däremot t en avtagande funktion händer två saker: dels är derivatan negativ och dels är $b = t(\alpha)$ och $a = t(\beta)$, det vill säga gränserna kastas om. Å andra sidan är högerledet i (8.1) nu

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t(y)) \left(-\frac{dt}{dy}\right) dy = \int_{\beta}^{\alpha} f(t(y)) \frac{dt}{dy} dy.$$

I båda fallen ser vi att (8.1) stämmer överens med formeln (4.1) från envariabelana-



lysen. Fördelen med formuleringen (8.1) är att den positiva faktorn $\left| \frac{dt}{dy} \right|$, oavsett om t är växande eller avtagande, kan tolkas som den lokala längdförstoringen $\Delta x / \Delta y$ som t medför kring punkten $x = t(y)$.

I fallet av en dubbelintegral $\iint_D f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2$ antar vi analogt givet en variabelbytesfunktion $T : \tilde{D} \rightarrow D$, som avbildar punkter $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \tilde{D} \subset \mathbf{R}^2$ i det "nya" området på punkter $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in D \subset \mathbf{R}^2$ i det "gamla" området. Eftersom T är ett variabelbyte antas T vara en *bijektiv* funktion, det vill säga för varje $\mathbf{x} \in D$ finns ett $\mathbf{y} \in \tilde{D}$ sådant att $\mathbf{x} = T(\mathbf{y})$ (T är *surjektiv*) och detta \mathbf{y} är unikt (T är *injektiv*). (I envariabelfallet var t injektiv eftersom den var strängt monoton.) Vidare är nu funktionen T vektorvärd, och vi skriver

$$(x_1, x_2) = T(y_1, y_2) = (t_1(y_1, y_2), t_2(y_1, y_2)),$$

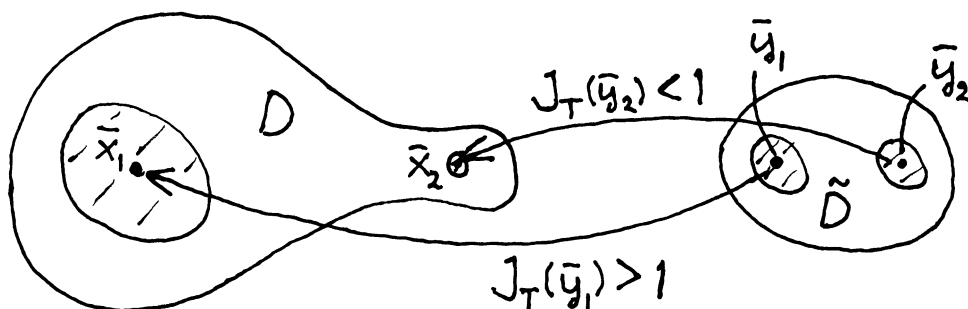
där de två skalära funktionerna $t_i : \tilde{D} \rightarrow \mathbf{R}$ är T 's komponentfunktioner. Eftersom $T : \tilde{D} \rightarrow D$ är bijektiv, existerar det en invers funktion $T^{-1} : D \rightarrow \tilde{D}$. Vi antar här att både T och T^{-1} är C^1 -funktioner, det vill säga alla åtta partiella derivator $\frac{\partial t_i}{\partial x_j}$ och $\frac{\partial (t^{-1})_i}{\partial x_j}$ existerar och är kontinuerliga funktioner på \tilde{D} respektive D . *Variabelbytesformeln* för dubbelintegraler lyder

$$\iint_D f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 = \iint_{\tilde{D}} f(T(\mathbf{y})) |J_T(\mathbf{y})| dy_1 dy_2. \quad (8.2)$$

Faktorn $J(\mathbf{y}) = J_T(\mathbf{y})$, som ersätter derivatan $\frac{dt}{dy}$, kallas *Jacobianen* (alternativt Jacobideterminanten eller funktionaldeterminanten) för variabelbytet T . Denna definieras som determinanten

$$J_T(\mathbf{y}) := \det \begin{bmatrix} \frac{\partial t_1}{\partial y_1} & \frac{\partial t_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial t_2}{\partial y_1} & \frac{\partial t_2}{\partial y_2} \end{bmatrix} = \frac{\partial t_1}{\partial y_1} \frac{\partial t_2}{\partial y_2} - \frac{\partial t_2}{\partial y_1} \frac{\partial t_1}{\partial y_2}.$$

Precis som för enkelintegralen är den geometriska betydelsen av $|J_T|$ den måttförstoring som T medför. För dubbelintegralen är det alltså frågan om areaförstoring.



Exempel 8.1. Det polära variabelbytet är

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \varphi, \\ x_2 = r \sin \varphi, \end{cases}$$

där vi skriver (r, φ) istället för (y_1, y_2) för de nya koordinaterna. Detta beskriver en vektorvärd funktion $(x_1, x_2) = T(r, \varphi)$ med komponentfunktioner $t_1(r, \varphi) = r \cos \varphi$ och $t_2(r, \varphi) = r \sin \varphi$. Jacobianen blir här

$$J_T(r, \varphi) = \det \begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{bmatrix} = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r.$$

Vi återkommer i kapitel 8.2 till det polära variabelbytet.

För att använda variabelbytesformeln (8.2) för dubbelintegraler, är det alltså tre saker att beräkna, givet den "gamla" integralen $\iint_D f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2$ och variabelbytet T .

- (i) Det nya området \tilde{D} behöver bestämmas. Detta kan till exempel göras så att man sätter in $x_1 = t_1(y_1, y_2)$ och $x_2 = t_2(y_1, y_2)$ i olikheterna för variablerna x_1 och x_2 som bestämmer D och tolkar de olikheter för variablerna y_1 och y_2 som man får.
- (ii) Man behöver byta ut variablerna (x_1, x_2) mot (y_1, y_2) i funktionen f . Om till exempel $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ får man för det polära variabelbytet $f(T(r, \varphi)) = r^2$. Notera att för den sammansatta funktionen $f(T(y_1, y_2))$ använder man ofta den praktiska, men ej formellt korrekta, beteckningen $f(y_1, y_2)$.
- (iii) Man behöver räkna ut Jacobianen $J_T(\mathbf{y})$. Glöm ej att ta absolutbeloppet av denna.

8.1 Linjära variabelbyten

I detta avsnitt visar vi variabelbytesformeln (8.2) i fallet då T är ett linjärt variabelbyte. Detta innebär att vi antar att

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{x} = T(\mathbf{y}) = A\mathbf{y} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{bmatrix},$$

där A är en konstant inverterbar 2/2 matris. För detta variabelbyte är alltså Jacobianen $J_T = \det A \neq 0$ ett *konstant* tal. (I allmänhet beror J_T på \mathbf{y} .) Notera också att löser vi ut \mathbf{y} , får vi

$$\mathbf{y} = A^{-1}\mathbf{x} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

enligt Cramers regel. Den inversa funktionen $\mathbf{y} = T^{-1}\mathbf{x}$ är alltså även den linjär.

För att visa variabelbytesformeln för linjära T är det användbart att först studera hur en tredimensionell linjär avbildning

$$S(\mathbf{y}) = B\mathbf{y} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

förändrar volymen av en öppen mängd $\Omega \subset \mathbf{R}^3$, speciellt en subgraf. Vi antar även här att S är inverterbar, det vill säga $\det B \neq 0$.

Sats 8.2. *Låt Ω vara en öppen mängd och låt $S(\mathbf{y}) = B\mathbf{y}$ vara en inverterbar linjär avbildning. Då är bildmängden*

$$S(\Omega) := \{\mathbf{x} ; \mathbf{x} = S(\mathbf{y}) \text{ för något } \mathbf{y} \in \Omega\}$$

öppen och har måttet

$$|S(\Omega)| = |\det B| |\Omega|, \tag{8.3}$$

där $|\det B|$ betecknar absolutbeloppet av talet $\det B$.

Vi väntar med beviset för Sats 8.2 till slutet av detta kapitel och ser först hur satsen kan användas.

Följdsats 8.3. Låt $S(\mathbf{y}) = B\mathbf{y}$ vara en isometrisk avbildning (vilket är ekvivalent med att B är en ortogonal matris). Då är

$$|S(\Omega)| = |\Omega|$$

för varje öppen mängd $\Omega \subset \mathbf{R}^3$. Detta innebär speciellt att måttet är rotationsinvariant eller ekvivalent att det är oberoende av vilket cartesiskt koordinatsystem man använder för \mathbf{R}^3 .

Bevis. Ortogonala matriser har determinant ± 1 . □

Vi noterar också en användbar räkneregler för dubbelintegraler som vi ännu inte tagit upp.

Sats 8.4. Låt $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ vara en kontinuerlig funktion på en öppen mängd D . Om $\alpha \in \mathbf{R}$ är en konstant så är

$$\iint_D \alpha f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 = \alpha \iint_D f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2.$$

Bevis. På vanligt sätt reducerar vi till fallet $f \geq 0$ och vi kan även anta att $\alpha > 0$. För sådana f och α ser vi att vad vi behöver visa är att

$$|G_D(\alpha f)| = \alpha |G_D(f)|.$$

Vi låter $\Omega := G_D(f)$ och noterar att en punkt $(\mathbf{y}, y_3) \in \mathbf{R}^3$ tillhör Ω då $\mathbf{y} \in D$ och $0 < y_3 < f(\mathbf{y})$. Betrakta nu den linjära avbildningen $(\mathbf{x}, x_3) = S(\mathbf{y}, y_3) := (\mathbf{y}, \alpha y_3)$, det vill säga $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ och $x_3 = \alpha y_3$. Dess matris är

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix},$$

och vi ser att $\det B = \alpha$. Vidare består bildmängden $S(\Omega)$ av de punkter $(\mathbf{x}, x_3) = (\mathbf{y}, \alpha y_3)$ sådana att $\mathbf{y} \in D$ och $0 < y_3 < f(\mathbf{y})$, det vill säga $\mathbf{x} \in D$ och $0 < x_3 < \alpha f(\mathbf{x})$. Alltså är $S(\Omega) = G_D(\alpha f)$. Sats 8.2 visar därför att

$$|G_D(\alpha f)| = |S(\Omega)| = |\det B| |\Omega| = \alpha |G_D(f)|,$$

vilket skulle visas. □

Slutligen visar vi variabelbytessatsen för linjära avbildningar.

Sats 8.5 (Linjära variabelbytessatsen). Låt $\mathbf{x} = T(\mathbf{y}) = A\mathbf{y}$ vara ett linjärt variabelbyte mellan öppna mängder, säg $T : \tilde{D} \rightarrow D$. Då är

$$\iint_D f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 = |\det A| \iint_{\tilde{D}} f(T(\mathbf{y})) dy_1 dy_2$$

om $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ är kontinuerlig.

Bevis. På vanligt sätt reducerar vi till fallet $f \geq 0$. För sådana f ser vi att vad vi behöver visa är att

$$|G_D(f)| = |\det A| |G_{\tilde{D}}(f \circ T)|,$$

där $(f \circ T)(\mathbf{y}) = f(T(\mathbf{y}))$. Notera att en punkt $(\mathbf{y}, y_3) \in \mathbf{R}^3$ tillhör subgrafan $G_{\tilde{D}}(f \circ T)$ då $\mathbf{y} \in \tilde{D}$ och $0 < y_3 < f(T(\mathbf{y}))$. Låt nu $\Omega := G_{\tilde{D}}(f \circ T)$ och låt S vara den tredimensionella linjära avbildningen

$$(\mathbf{x}, x_3) = S(\mathbf{y}, y_3) = (A\mathbf{y}, y_3),$$

det vill säga $\mathbf{x} = A\mathbf{y}$ och $x_3 = y_3$. Matrisen B som representerar S är sålunda

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

speciellt är $\det B = \det A$. Vidare består bildmängden $S(\Omega)$ av de punkter $(\mathbf{x}, x_3) = (A\mathbf{y}, y_3)$ sådana att $\mathbf{y} \in \tilde{D}$ och $0 < y_3 < f(T(\mathbf{y}))$, det vill säga $\mathbf{x} \in D$ och $0 < x_3 < f(\mathbf{x})$. Alltså är $S(\Omega) = G_D(f)$. Sats 8.2 visar därför att

$$|G_D(f)| = |S(\Omega)| = |\det B| |\Omega| = |\det A| |G_{\tilde{D}}(f \circ T)|,$$

vilket skulle visas. □

Exempel 8.6. Betrakta dubbelintegralen

$$\iint_D x_1 x_2 \, dx_1 dx_2,$$

där D är parallelogrammet med hörn i $(-2, 0)$, $(2, -2)$, $(5, -1)$ och $(1, 1)$. (Rita!) Vi translaterar först dubbelintegralen med variabelbytet $x'_1 = x_1 + 2$, $x'_2 = x_2$, vilket förflyttar hörnet $(x_1, x_2) = (-2, 0)$ till origo, och de övriga hörnen till $(4, -2)$, $(7, -1)$ och $(3, 1)$. Härnäst beskriver vi två metoder för att konstruera ett linjärt variabelbyte som avbildar detta parallelogram på en axelparallell rektangel i det nya koordinatplanet $y_1 y_2$.

(1) Bestäm de två kantvektorerna från origo till de två närliggande hörnen, vilka här är $(4, -2)$ och $(3, 1)$, och bilda den matris som har dessa vektorer som *kolumner*. Enligt detta recept betraktar vi variabelbytet

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad \text{eller ekvivalent} \quad \begin{cases} x'_1 = 4y_1 + 3y_2, \\ x'_2 = -2y_1 + y_2. \end{cases}$$

Konstrueras variabelbytet utifrån hörnpunkterna i $x'_1 x'_2$ -planet på detta sätt, kommer alltid det nya området \tilde{D} i $y_1 y_2$ -planet bli kvadraten med hörn i origo, $(1, 0)$, $(1, 1)$ och $(0, 1)$. För att se detta noterar vi först att hörnpunkterna avbildas på detta sätt (eller hur?). Dessutom gäller det alltid för linjära avbildningar att parallelogram avbildas på parallelogram (jämför med motsvarande tredimensionella resultat i (8.5) nedan), vilket visar att området \tilde{D} måste vara kvadraten med de givna hörnen.

Med variabelbytessatsen får vi nu

$$\begin{aligned} \iint_D x_1 x_2 dx_1 dx_2 &= \iint_{D'} (x'_1 - 2)x'_2 dx'_1 dx'_2 \\ &= 10 \iint_{\tilde{D}} (4y_1 + 3y_2 - 2)(-2y_1 + y_2) dy_1 dy_2 \\ &= 10 \int_0^1 \left(\int_0^1 (-8y_1^2 + 3y_2^2 - 2y_1 y_2 + 4y_1 - 2y_2) dy_1 \right) dy_2 = \dots = -\frac{35}{3}. \end{aligned}$$

(2) Ett alternativt sätt att finna lämpligt variabelbyte är följande. Vi bestämmer först ekvationerna för de två sidlinjer till parallelogrammet i $x'_1 x'_2$ -planet som går genom origo. Dessa ses vara $x'_2 = x'_1/3$ och $x'_2 = -x'_1/2$, det vill säga $x'_1 - 3x'_2 = 0$ och $x'_1 + 2x'_2 = 0$. Genom att sätta in det till origo motstående hörnet $(7, -1)$ i båda ekvationernas vänsterled får vi de två övriga sidlinjernas ekvationer. Vi ser att parallelogrammet D' i $x'_1 x'_2$ -planet beskrivs av $0 < x'_1 - 3x'_2 < 10$ och $0 < x'_1 + 2x'_2 < 5$. Ett lämpligt variabelbyte är därför

$$\begin{cases} y_1 = x'_1 - 3x'_2, \\ y_2 = x'_1 + 2x'_2, \end{cases} \quad \text{eller ekvivalent} \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix}, \quad (8.4)$$

vilket ger integrationsområdet $\tilde{D} = \{(y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2 ; 0 < y_1 < 10, 0 < y_2 < 5\}$. För att kunna använda Sats 8.5 med detta variabelbyte, måste vi först lösa ut x'_1 och x'_2 :

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/5 & 3/5 \\ -1/5 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Variabelbytessatsen ger nu att

$$\begin{aligned} \iint_D x_1 x_2 dx_1 dx_2 &= \iint_{D'} (x'_1 - 2)x'_2 dx'_1 dx'_2 \\ &= \frac{1}{5} \iint_{\tilde{D}} (2y_1/5 + 3y_2/5 - 2)(-y_1/5 + y_2/5) dy_1 dy_2 \\ &= \frac{1}{5^3} \int_0^5 \left(\int_0^{10} (-2y_1^2 + 3y_2^2 - y_1 y_2 + 10y_1 - 10y_2) dy_1 \right) dy_2 = \dots = -\frac{35}{3}. \end{aligned}$$

Avslutningsvis noterar vi att en fördel med metoden (1) är att vi här direkt får x'_1 , x'_2 uttryckta i y_1 , y_2 som önskat, medan det inversa sambandet fås i (2). För att jämföra de två metoderna, notera att *raderna* i matrisen i (8.4) geometriskt tolkas som normalvektorer till sidlinjerna, medan *kolumnerna* i matrisen i (1) är parallelogrammets kantvektorer. Vi ser också att kolumnerna i den inverterade matrisen i (2) är parallella med kolumnerna i matrisen i (1). Detta gäller allmänt, inte bara i detta exempel. (Varför?)

Exempel 8.7. Vi önskar beräkna

$$\iint_D x_2 dx_1 dx_2,$$

där D är det inre av triangeln med hörn i $(0, 0)$, $(1, 1)$ och $(-1, 2)$ (rita triangeln!). Vi kan beräkna denna integral med itererad integration direkt. Nackdelen är dock att vi behöver dela upp integralen i två med Följdsats 7.7 vare sig vi väljer att integrera först med avseende på x_1 eller x_2 . Låt oss integrera först med avseende på x_1 (eftersom integranden x_2 är konstant med avseende på x_1). Vi får

$$\begin{aligned} \iint_D x_2 dx_1 dx_2 &= \int_0^1 \left(\int_{-x_2/2}^{x_2} x_2 dx_1 \right) dx_2 + \int_1^2 \left(\int_{-x_2/2}^{3-2x_2} x_2 dx_1 \right) dx_2 \\ &= \int_0^1 \frac{3x_2^2}{2} dx_2 + \int_1^2 \left(3 - \frac{3x_2}{2} \right) x_2 dx_2 = \frac{1}{2} + \left[\frac{3x_2^2}{2} - \frac{x_2^3}{2} \right]_1^2 = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

För att slippa uppdelningen kan vi alternativt göra ett variabelbyte. Till exempel kan vi överföra kantvektorerna $(1, 1)$ och $(-1, 2)$ till basvektorerna $(1, 0)$ och $(0, 1)$ i det "nya" $y_1 y_2$ -planet genom att göra det linjära variabelbytet

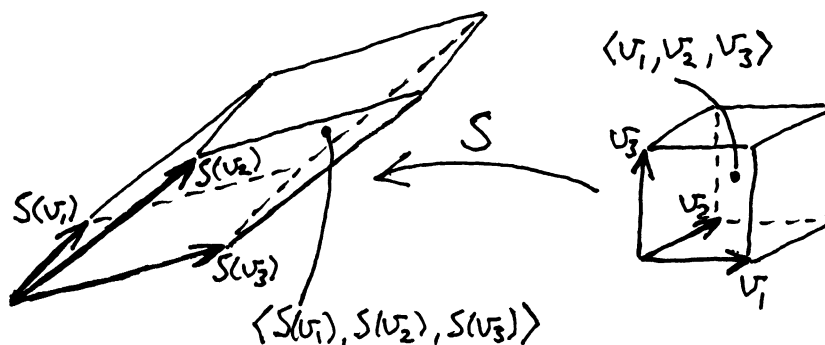
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = y_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = A\mathbf{y}.$$

Genom detta val av variabelbyte får hörnpunkterna $\mathbf{x} = (0, 0)$, $(1, 1)$ och $(-1, 2)$ nya koordinater $\mathbf{y} = (0, 0)$, $(1, 0)$ och $(0, 1)$. Eftersom linjära avbildningar avbildar linjer på linjer följer det att det nya området \tilde{D} blir precis det inre av triangeln med hörn i $(0, 0)$, $(1, 0)$ och $(0, 1)$. Vidare är $\det A = 3$ vilket ger

$$\begin{aligned} \iint_D x_2 dx_1 dx_2 &= 3 \iint_{\tilde{D}} (y_1 + 2y_2) dy_1 dy_2 = 3 \int_0^1 \left(\int_0^{1-y_1} (y_1 + 2y_2) dy_2 \right) dy_1 \\ &= 3 \int_0^1 (y_1(1-y_1) + (1-y_1)^2) dy_1 = 3 \int_0^1 (1-y_1) dy_1 = \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

återigen.

För att visa Sats 8.2 noterar vi först att det räcker att visa den för kuber Q . Kom ihåg från linjär algebra att för linjära avbildningar S gäller att om Q är en parallelepiped (speciellt om Q är en kub) så är bilden $S(Q)$ av Q under S även den en parallelepiped. Nämligen, om



$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle := \{ \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3 ; 0 < \lambda_1 < 1, 0 < \lambda_2 < 1, 0 < \lambda_3 < 1 \}$$

betecknar den parallelepiped som tre linjärt oberoende vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbf{R}^3$ spänner upp, så är

$$\begin{aligned} S(\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle) &= \{S(\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3) ; 0 < \lambda_k < 1\} \\ &= \{\lambda_1 S(\mathbf{v}_1) + \lambda_2 S(\mathbf{v}_2) + \lambda_3 S(\mathbf{v}_3) ; 0 < \lambda_k < 1\} = \langle S(\mathbf{v}_1), S(\mathbf{v}_2), S(\mathbf{v}_3) \rangle, \end{aligned} \quad (8.5)$$

enligt definitionen av att S är linjär.

Lemma 8.8. *Låt S vara en inverterbar linjär avbildning. Om (8.3) gäller för alla dyadiska kuber $\Omega = Q$, så gäller (8.3) även för varje öppen mängd.*

Bevis. Låt Ω vara en öppen mängd och betrakta dess kanoniska svit $(U_j)_{j=0}^\infty$. En sådan mängd kan skrivas

$$U_j = Q_1 \cup \dots \cup Q_{k_j} \cup N,$$

där Q_i är dyadiska öppna kuber med sidlängd 2^{-j} och N är en nollmängd. Å andra sidan ser vi att bildmängden $S(U_j)$ kan uppdelas i parallelepieder som

$$S(U_j) = S(Q_1) \cup \dots \cup S(Q_{k_j}) \cup S(N).$$

Enligt förutsättningarna gäller att $|S(Q_i)| = |\det B||Q_i|$ och vi ser också att $S(N)$ är en nollmängd eftersom den är en delmängd av en ändlig union av plan. Sats 7.6 ger nu att

$$|S(U_j)| = \sum_{i=1}^{k_j} |S(Q_i)| = \sum_{i=1}^{k_j} |\det B||Q_i| = |\det B||U_j|.$$

Låter vi här $j \rightarrow \infty$ följer att $|S(\Omega)| = |\det B||\Omega|$, eftersom $(S(U_j))_{j=0}^\infty$ är en uttömmande svit för $S(\Omega)$, vilket visar lemmat. \square

Läsaren med goda kunskaper i linjär algebra känner sig förmodligen helt övertygad om att (8.3) gäller för kuber. Ett rigoröst bevis av detta är dock inte helt uppenbart med vår definition av volymen av parallelepipederna $|S(Q)|$ med hjälp av av axelparallella kuber och den kanoniska sviten. Låt oss därför se hur ett sådant kan gå till.

Bevis av Sats 8.2. Precis som i [1, s.199] förutsätter vi att läsaren känner till hur man löser linjära ekvationssystem med Gausselimination. Med denna algoritm överför man en inverterbar matris, till exempel B^{-1} , till enhetsmatrisen i ett ändligt antal steg där man i varje steg antingen

- (i) byter ordning på två rader, vilket kan göras genom att man multiplicerar matrisen från vänster med någon av permutationsmatriserna

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{eller}$$

- (ii) multiplicerar en rad med $\lambda \neq 0$, vilket kan göras genom att flytta raden i fråga till rad 1, multiplicera med $\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ och sedan flytta tillbaka raden med någon av matriserna i (i), eller
- (iii) adderar rad m till rad n , vilket kan göras genom att flytta raderna i fråga till rad 2 och 1 respektive, multiplicera med $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ och sedan flytta tillbaka raderna med några av matriserna i (i).

Vi ser på detta sätt att vi kan skriva $E = M_1 M_2 \dots M_k B^{-1}$, vilket ger

$$B = M_1 M_2 \dots M_k$$

där E är enhetsmatrisen och var och en av matriserna M_j är en av de 5 matriserna i (i)-(iii). Observera nu att om (8.3) gäller för de fem matriserna ovan och för alla öppna mängder Ω så får vi

$$\begin{aligned} |S(\Omega)| &= |\det M_1| |S_2 S_3 \dots S_k(\Omega)| = \\ &\dots = |\det M_1| |\det M_2| \dots |\det M_k| |\Omega| = |\det B| |\Omega| \end{aligned}$$

enligt produktregeln för determinanter, där $S_j(\mathbf{x}) = M_j \mathbf{x}$ är den linjära avbildning som ges av matrisen M_j . Det räcker därför att visa (8.3) för var och en av de fem matriserna. Dessutom räcker det att betrakta kuber Q på grund av Lemma 8.8. För matriserna i (i) är detta klart ty de har determinant -1 och avbildar en kub på en lika stor kub. Matrisen i (ii) har determinant λ och avbildar en kub på ett rätblock med två sidor lika långa som Q :s sidlängd och med en sidlängd som är λ gånger större. Volymförstoringen är här uppenbarligen λ . Matrisen i (iii) har determinant 1 och ses *skjuva* kuben, det vill säga punkter i planet $x_2 = a$ translateras sträckan a längs x_1 -axeln. Vi kan här använda Cavalieris princip (exempel 5.3): eftersom varje tvärsnitt parallellt med $x_1 x_3$ -planet skär ut lika areor av Q och dess bild, är volymerna lika. Detta fullbordar beviset för Sats 8.2. \square

8.2 Polärt variabelbyte

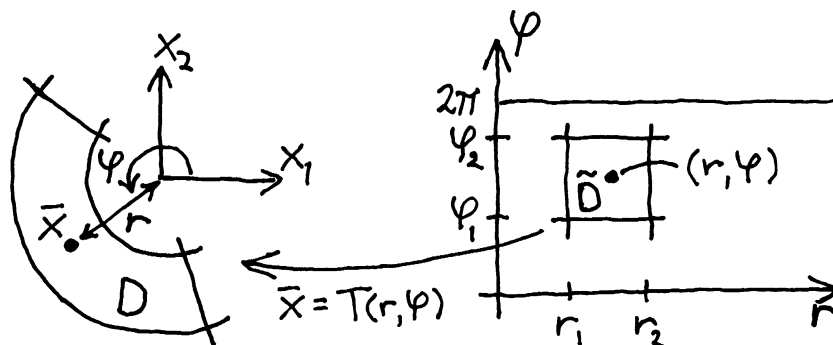
Detta kapitel behandlar hur man beräknar en dubbelintegral $\iint_D f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2$ med det polära variabelbytet $\mathbf{x} = (x_1, x_2) = T(r, \varphi)$, vilket har koordinatfunktioner

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \varphi, \\ x_2 = r \sin \varphi. \end{cases} \quad (8.6)$$

Som sagt i exempel 8.1 kallar vi här de nya variablerna (y_1, y_2) för (r, φ) . Vinkeln φ kallas ofta alternativt för θ eller v . Vi väljer beteckningen φ här eftersom detta går väl ihop med det rymdpolära variabelbytet i kapitel 9. Försöker vi lösa ut r och φ i (8.6) ser vi att vi får

$$\begin{cases} r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \\ \cos \varphi = x_1 / \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \\ \sin \varphi = x_2 / \sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \end{cases}$$

Från de två sista ekvationerna ser vi att vinkeln φ moturs från positiva x_1 -axeln är bestämd så när som på en multipel av 2π . Vi väljer här att använda $\varphi \in [0, 2\pi)$ (en annan vanlig konvention är $\varphi \in (-\pi, \pi]$). Vi noterar också att *avståndet från origo* r alltid uppfyller $r \geq 0$.



Sats 8.9 (Polära variabelbytessatsen). Låt $\mathbf{x} = T(\mathbf{y})$ vara det polära variabelbytet. Fixera $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$ och $0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 \leq 2\pi$ och betrakta den öppna mängden

$$\tilde{D} := \{(r, \varphi) \in \mathbf{R}^2 ; r_1 < r < r_2, \varphi_1 < \varphi < \varphi_2\}.$$

Det polära variabelbytet T avbildar denna rektangel i det nya koordinatplanet bijektivt på en öppen mängd D i x_1x_2 -planet. Vi har att

$$\iint_D f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 = \iint_{\tilde{D}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi, \quad (8.7)$$

(observera Jacobianen $J_T(r, \varphi) = r$) om $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ är kontinuerlig.

Vi väntar lite med beviset för att först komma med ett par kommentarer. Den vanligaste användningen av polärt variabelbyte är för att räkna ut en dubbelintegral över en cirkelskiva. Låter vi i Sats 8.9 $r_1 = 0$, $\varphi_1 = 0$ och $\varphi_2 = 2\pi$ följer det att

$$\iint_{|\mathbf{x}| < r_2} f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 = \iint_{0 < r < r_2, 0 < \varphi < 2\pi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi,$$

om f är kontinuerlig på cirkelskivan $|\mathbf{x}| < r_2$. Vi har här använt i vänsterledet att linjen $N := \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 ; x_2 = 0, 0 \leq x_1 < r_2\}$ är en nollmängd, och därför enligt Följdsats 7.7 att

$$\iint_{|\mathbf{x}| < r_2} f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 = \iint_{|\mathbf{x}| < r_2, \mathbf{x} \notin N} f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2.$$

På samma sätt kan det polära variabelbytet användas då D är en cirkelring $a^2 < x_1^2 + x_2^2 < b^2$ genom att vi först försummar nollmängden $\{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 ; x_2 = 0, a < x_1 < b\}$. Speciellt om f är en radiell funktion ska vi nu visa hur radialformeln (5.7) följer som specialfall av variabelbytesformeln (8.7).

Bevis av Sats 5.8. Låt $f(x_1, x_2) = f(r)$ vara en radiell funktion, det vill säga oberoende av vinkeln φ , definierad på cirkelringen $a^2 < x_1^2 + x_2^2 < b^2$. Genom polärt variabelbyte (8.7) följt av itererad integration får vi

$$\begin{aligned} \iint_{a^2 < x_1^2 + x_2^2 < b^2} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 &= \iint_{a < r < b, 0 < \varphi < 2\pi} f(r)r dr d\varphi \\ &= \int_a^b \left(\int_0^{2\pi} 1 d\varphi \right) f(r)r dr = 2\pi \int_a^b f(r)r dr, \end{aligned}$$

vilket visar radialformeln. \square

Bevis av Sats 8.9. (i) Antag först att \tilde{D} (och därmed D) är en begränsad mängd, det vill säga $r_2 < \infty$, och att f är kontinuerlig på det slutna höljet \overline{D} . Vi siktar på att visa (8.7) genom att använda Sats 7.13 för Riemannsummor och delar därför upp rektangeln $\tilde{D} = (r_1, r_2) \times (\varphi_1, \varphi_2)$ i en mängd små öppna rektanglar $(\tilde{D}_j)_{j=1}^k$ så att

$$\tilde{D} = \tilde{D}_1 \cup \dots \cup \tilde{D}_k \cup \tilde{N},$$

där \tilde{N} är en nollmängd som är unionen av ett antal horisontella och vertikala linjer. Betrakta nu en sådan liten rektangel

$$\tilde{D}_j = (a, b) \times (\alpha, \beta),$$

där $r_1 \leq a < b \leq r_2$ och $\varphi_1 \leq \alpha < \beta \leq \varphi_2$. Denna avbildas på en liten mängd D_j , som är en del av cirkelringen $a^2 < x_1^2 + x_2^2 < b^2$, vilken har arean $\pi(b^2 - a^2)$. Man ser vidare att D_j utgör andelen $(\beta - \alpha)/(2\pi)$ av hela cirkelringen, och därför är dess area

$$|D_j| = \frac{\beta - \alpha}{2\pi} \pi(b^2 - a^2) = \frac{a+b}{2}(b-a)(\beta - \alpha) = \frac{a+b}{2} |\tilde{D}_j|.$$

Vi väljer nu mittpunkten $(r_j, \varphi_j) := ((a+b)/2, (\alpha+\beta)/2)$ i \tilde{D}_j och motsvarande punkt $\mathbf{x}_j := T(r_j, \varphi_j)$. Areaförstoringen av den lilla rektangeln \tilde{D}_j som det polära variabelbytet ger är alltså $|D_j| = r_j |\tilde{D}_j|$. De små mängderna D_j utgör här en uppdelning av

$$D = D_1 \cup \dots \cup D_k \cup N,$$

där N är en nollmängd som är unionen av ett antal linjer och cirkelbågar. För denna uppdelning har vi Riemannsumman

$$\sum_{j=1}^k f(\mathbf{x}_j) |D_j| = \sum_{j=1}^k f(r_j \cos \varphi_j, r_j \sin \varphi_j) r_j |\tilde{D}_j|.$$

Högerledet här är en Riemannsumma för högerledet i (8.7). Vi förfinar nu uppdelningen av \tilde{D} , varvid motsvarande uppdelning av D förfinas, och låter förfiningen gå mot noll. Efter gränsövergång får vi (8.7) enligt Sats 7.13.

(ii) För att visa variabelbytessatsen för polärt variabelbyte utan de extra förutsättningarna i (i) använder vi nu Lemma 6.7. (Denna ses även gälla då D är begränsad och f är en teckenväxlande, kontinuerlig och begränsad funktion.) Den

uttömmande sviten $(\tilde{D}_j)_{j=0}^{\infty}$ (mängderna \tilde{D}_j här i (ii) har inte något att göra med mängderna i (i)) väljs här så att mängderna \tilde{D}_j är något mindre rektanglar än \tilde{D} . Med det polära variabelbytet T ger detta oss motsvarande uttömmande svit $(D_j)_{j=0}^{\infty}$, där mängderna D_j är något mindre än D . På detta sätt är f kontinuerlig på det slutna höljet \bar{D}_j för varje j , så enligt (i) är

$$\iint_{D_j} f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 = \iint_{\tilde{D}_j} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi.$$

Låter vi här $j \rightarrow \infty$ följer (8.7) genom att använda Lemma 6.7 både i höger och vänster led. \square

Exempel 8.10. Vi önskar beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D x_2 dx_1 dx_2, \quad D = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 ; x_1^2 + x_2^2 < 4, x_2 > |x_1|\}.$$

Området är cirkelsektorn innanför cirkeln med centrum i origo och radie $r = 2$ och mellan strålarna $\varphi = \pi/4$ och $\varphi = 3\pi/4$ (rita upp!). Vi noterar först att både området och funktionen är symmetriska med avseende på x_2 -axeln. Delar vi därför upp $D = D_1 \cup N \cup D_2$, där D_1 är halvan av D i höger halvplan $x_1 > 0$, N är en nollmängd och D_2 är halvan av D i vänster halvplan, så är

$$\iint_D x_2 dx_1 dx_2 = \iint_{D_1} x_2 dx_1 dx_2 + \iint_{D_2} x_2 dx_1 dx_2 = 2 \iint_{D_1} x_2 dx_1 dx_2.$$

(För att se att de två bitarna är lika kan du göra det linjära variabelbytet $T : D_1 \rightarrow D_2 : (x_1, x_2) \mapsto (-x_1, x_2)$.) Eftersom D_1 är en cirkelsektor gör vi polärt variabelbyte och får

$$\begin{aligned} 2 \iint_{D_1} x_2 dx_1 dx_2 &= 2 \int_0^2 \left(\int_{\pi/4}^{\pi/2} r \sin \varphi d\varphi \right) r dr \\ &= 2 \left(\int_0^2 r^2 dr \right) \left(\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi \right) = \frac{8\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

För att kontrollera räkningen här räknar vi även ut integralen direkt med hjälp av itererad integration, och får

$$2 \iint_{D_1} x_2 dx_1 dx_2 = 2 \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_{x_1}^{\sqrt{4-x_1^2}} x_2 dx_2 \right) dx_1 = \int_0^{\sqrt{2}} (4 - 2x_1^2) dx_1 = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

återigen (hur ställde vi upp gränserna?).

Man kan även kombinera ett linjärt och polärt variabelbyte. Detta är speciellt användbart då integrationsområdet är en ellips.

Exempel 8.11. Vi vill beräkna

$$\iint_D x_2^2 dx_1 dx_2, \quad D = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 ; x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 < 3\}.$$

Idén är här att först överföra ellipsen till en cirkel med ett linjärt variabelbyte och därefter överföra cirkeln till en rektangel med polärt variabelbyte, där man slutligen kan beräkna integralen med hjälp av itererad integration. För att göra området cirkulärt kvadratkompletterar vi först, vilket ger $(x_1 - \frac{1}{2}x_2)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 < 3$, det vill säga

$$\left(\frac{x_1}{\sqrt{3}} - \frac{x_2}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{2}\right)^2 < 1.$$

Det är nu lämpligt att göra variabelbytet

$$\begin{cases} y_1 = \frac{x_1}{\sqrt{3}} - \frac{x_2}{2\sqrt{3}}, \\ y_2 = \frac{x_2}{2}, \end{cases}$$

eftersom ekvationen som bestämmer D då övergår i $y_1^2 + y_2^2 < 1$, det vill säga det nya området \tilde{D} blir enhetsskivan. För att göra variabelbytet $\mathbf{x} = A\mathbf{y}$, behöver vi de gamla variablerna uttryckta i de nya. Vi löser därför ut x_1 och x_2 och får

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{3}y_1 + y_2, \\ x_2 = 2y_2. \end{cases}$$

Speciellt ser vi att $A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, så att $\det A = 2\sqrt{3}$. Linjärt variabelbyte ger

$$\iint_D x_2^2 dx_1 dx_2 = \iint_{\tilde{D}} (2y_2)^2 (2\sqrt{3}) dy_1 dy_2.$$

Vi kan nu göra det polära variabelbytet och får

$$\begin{aligned} \iint_{\tilde{D}} (2y_2)^2 (2\sqrt{3}) dy_1 dy_2 &= 8\sqrt{3} \iint_{0 < r < 1, 0 < \varphi < 2\pi} (r^2 \sin^2 \varphi) r dr d\varphi \\ &= 8\sqrt{3} \left(\int_0^1 r^3 dr \right) \left(\int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \right) = 8\sqrt{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi = 2\sqrt{3}\pi. \end{aligned}$$

Vi har här använt omskrivningen $\sin^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\varphi))$, från formeln för dubbla vinkeln för cosinus, för att beräkna den sista integralen.

9 Trippelintegralen och rympolärt variabelbyte

Vi har hittills behandlat dubbelintegralen av en funktion $f(x_1, x_2)$ av två variabler över $D \subset \mathbf{R}^2$. Analogt definieras *multipelintegralen* av en kontinuerlig funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ av n variabler över en öppet mängd $D \subset \mathbf{R}^n$. I fallet $f \geq 0$ har vi

$$\int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int \dots \int_D f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n := |G_D(f)|,$$

där det första skrivsättet är den kompakta notationen. Subgrafen

$$G_D(f) := \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{n+1} ; \mathbf{x} \in D, 0 < x_{n+1} < f(\mathbf{x})\},$$

är nu en delmängd av \mathbf{R}^{n+1} . Måttet av denna öppna mängd definieras med hjälp av hyperkuber Q med sidlängd 2^{-j} och mått ($=n+1$ -volym) $(2^{-j})^{n+1}$. Det enklaste fallet är då $n=3$, då vi skriver

$$\iiint_D f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3$$

för *trippelintegralen* av en trevariabelfunktion f över den tredimensionella mängden $D \subset \mathbf{R}^3$. Redan för trippelintegralen är dess subgraf en delmängd av \mathbf{R}^4 , varför vi nöjt oss med dubbelintegralen fram till nu för den geometriska åskådliggörelsen skull. Även om endast definitionsmängden D som kan åskådliggöras för trippelintegraler har denna en mycket konkret användning, till exempel för beräkning av massa och tyngdpunkt av en tredimensionell kropp.

Exempel 9.1. Betrakta en kropp $D \subset \mathbf{R}^3$ med densitetsfunktion $\rho(\mathbf{x})$. Detta betyder att om $D_j \subset D$ är en liten omgivning av punkten \mathbf{x}_j (jämför Riemannsumorna från Definition 7.12) så har D_j approximativt massan $\rho(\mathbf{x}_j)|D_j|$. Har man därför en uppdelning $D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_k \cup N$ är den totala massan av D därmed

$$M(D) \approx \sum_{j=1}^k \rho(\mathbf{x}_j)|D_j|.$$

Med motsvarande Sats 7.13 för trippelintegraler ser man genom finare och finare uppdelning av D att denna approximation blir bättre och bättre och efter gränsvärdet får man uttrycket

$$M(D) = \iiint_D \rho(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 dx_3$$

för den totala massan av kroppen D . Denna formel kan ses som en definition av massan av en kropp med given densitetsfunktion ρ , motiverad genom argumentet med Riemannsummor ovan.

Vi noterar också följande samband mellan de tre- och fyrdimensionella måtten som visas helt analogt med Sats 2.10.

Sats 9.2. Låt $D \subset \mathbf{R}^3$ vara en öppen mängd och låt $a > 0$. Då ges 4-volymen av cylindern $D \times (0, a) := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 ; (x_1, x_2, x_3) \in D, x_4 \in (0, a)\} \subset \mathbf{R}^4$ av $|D \times (0, a)| = a|D|$. Enligt definitionen av trippelintegralen betyder detta att

$$\iiint_D a dx_1 dx_2 dx_3 = a|D|.$$

Speciellt kan man alltså beräkna volymen $|D|$ av ett område genom att trippelintegrera den konstanta funktionen 1 över D . Detta ger oss ytterligare en teknik

jämte dubbelintegraler för att beräkna volymer: i trippelintegralen kan vi som vi snart ska se göra tredimensionella variabelbyten.

Låt oss först se hur vi kan beräkna trippelintegraler med itererad integration. Läsaren har förmodligen redan noterat att stav- och skivformeln för att beräkna volymen av en tredimensionell kropp Ω egentligen är en och samma sats. Använder vi den kortfattade vektornotationen för integraler säger båda satserna att

$$|\Omega| = \int_D |\Omega_{\mathbf{x}}| d\mathbf{x}.$$

Enda skillnaden är att för stavformeln är projektionen D tvådimensionell medan tvärsnittet $\Omega_{\mathbf{x}}$ är endimensionellt (staven). För skivformeln är projektionen D endimensionell medan tvärsnittet $\Omega_{\mathbf{x}}$ är tvådimensionellt (skivan). För ett fyrdimensionellt område $\Omega \subset \mathbf{R}^4$ får man analogt tre formler. (Låt inte de fyrdimensionella resonemangen i (i)-(iii) nedan avskräcka. Det är formlerna (9.1) och (9.2) för itererad integration i trippelintegraler som är viktigast här, och mängderna D_f , I , $(D_f)_{x_1x_2}$ och $(D_f)_{x_1}$ är alla högst tredimensionella.)

(i) Med dimensioner $(\Omega, D, \Omega_{\mathbf{x}}) = (4, 3, 1)$ får man stavformeln för beräkning av 4-volymen av Ω :

$$|\Omega| = \iiint_D |\Omega_{x_1x_2x_3}| dx_1 dx_2 dx_3.$$

Här är D projektionen av Ω på $x_1x_2x_3$ -rummet och $\Omega_{x_1x_2x_3}$ är endimensionella tvärsnitt parallella med x_4 -axeln.

(ii) Med dimensioner $(\Omega, D, \Omega_{\mathbf{x}}) = (4, 2, 2)$ får man skivformeln för beräkning av 4-volymen av Ω :

$$|\Omega| = \iint_D |\Omega_{x_1x_2}| dx_1 dx_2.$$

Här är D projektionen av $\Omega \subset \mathbf{R}^4$ på x_1x_2 -planet och $\Omega_{x_1x_2}$ är tvådimensionella tvärsnitt parallella med x_3x_4 -planet.

Speciellt genom att välja Ω som subgrafan av en trevariabelfunktion $f : D_f \rightarrow \mathbf{R}$ över ett öppet område $D_f \subset \mathbf{R}^3$ och "under" grafen $x_4 = f(x_1, x_2, x_3)$, leder detta till formeln

$$\iiint_{D_f} f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_I \left(\int_{(D_f)_{x_1x_2}} f(x_1, x_2, x_3) dx_3 \right) dx_1 dx_2, \quad (9.1)$$

där I projektionen av $D_f \subset \mathbf{R}^3$ på x_1x_2 -planet och $(D_f)_{x_1x_2}$ är linjen parallell med x_3 -axeln som går genom $(x_1, x_2, 0)$. (Vi skriver här D_f för f 's definitionsmängd för att skilja den från D i skivformeln.)

(iii) Med dimensioner $(\Omega, D, \Omega_{\mathbf{x}}) = (4, 1, 3)$ får man en variant av stav- och skivformeln med tredimensionella snitt för beräkning av 4-volymen av Ω :

$$|\Omega| = \int_D |\Omega_{x_1}| dx_1.$$

Här är D projektionen av $\Omega \subset \mathbf{R}^4$ på x_1 -axeln och Ω_{x_1} är tredimensionella tvärsnitt parallella med $x_2x_3x_4$ -rummet.

Speciellt genom att välja Ω som subgrafan av en trevariabelfunktion $f : D_f \rightarrow \mathbf{R}$ över ett öppet område $D_f \subset \mathbf{R}^3$ och "under" grafen $x_4 = f(x_1, x_2, x_3)$, leder detta till formeln

$$\iiint_{D_f} f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_I \left(\iint_{(D_f)_{x_1}} f(x_1, x_2, x_3) dx_2 dx_3 \right) dx_1, \quad (9.2)$$

där I projektionen av $D_f \subset \mathbf{R}^3$ på x_1 -axeln och $(D_f)_{x_1}$ är planet parallellt med $x_2 x_3$ -planet som går genom $(x_1, 0, 0)$.

Både i (9.1) och (9.2) kan dubbelintegralen beräknas med itererad integration för dubbelintegraler enligt tidigare. Till sist noterar vi att vi givetvis i alla dessa formler kan byta ordning på variablerna analogt med anmärkning 5.5.

Exempel 9.3. Betrakta glasstruten (rita upp!)

$$D = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 ; x_3 > \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 2 \right\}.$$

Vi antar att glaset har en varierande densitet $\rho(x_1, x_2, x_3) = x_3$ (så att toppen är tyngst) och önskar beräkna dess totala massa. Denna beräknas enligt exempel 9.1 som

$$\iiint_D x_3 dx_1 dx_2 dx_3.$$

På grund av att området D är rotationssymmetriskt kring x_3 -axeln är det lämpligt att genomföra itererad integration enligt $\iint (\int dx_3) dx_1 dx_2$ eller $\int (\iint dx_1 dx_2) dx_3$.

(i) Vi integrerar här med avseende på x_3 först (innerst) och projicerar därför D på $x_1 x_2$ -planet. I din figur ser du att projektionen är enhetsskivan. För att finna gränserna till den inre integralen, fixerar vi en punkt (x_1, x_2) i enhetsskivan och betraktar tvärsnittet parallellt med x_3 -axeln. Den vertikala linjen ses skära D ovanför konen $x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ och under sfären $x_3 = \sqrt{2 - x_1^2 - x_2^2}$. Detta ger den itererade integralen

$$\begin{aligned} \iint_{x_1^2 + x_2^2 < 1} \left(\int_{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}^{\sqrt{2 - x_1^2 - x_2^2}} x_3 dx_3 \right) dx_1 dx_2 \\ = \iint_{x_1^2 + x_2^2 < 1} (1 - x_1^2 - x_2^2) dx_1 dx_2 = 2\pi \int_0^1 (1 - r^2)r dr = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

där vi använt radialformeln för att beräkna dubbelintegralen eftersom området och funktionen är rotationssymmetriska.

(ii) Vi integrerar nu istället med avseende på $x_1 x_2$ först (innerst) och projicerar därför D på x_3 -axeln. I din figur ser du att projektionen är intervallet $(0, \sqrt{2})$. För att finna det plana området i den inre dubbelintegralen, fixerar vi en punkt $x_3 \in (0, \sqrt{2})$ och skär glasstruten med ett horisontellt plan på höjden x_3 . Vi ser nu i figuren att om $x_3 < 1$ så kommer tvärsnittet vara en cirkelskiva med radien x_3 (konden bestämmer tvärsnittet) medan om $x_3 > 1$ så kommer tvärsnittet vara en cirkelskiva med radien $\sqrt{2 - x_3^2}$ (sfären bestämmer tvärsnittet). Här bör vi alltså

dela upp D i delen D_1 under $x_3 = 1$ och delen D_2 över $x_3 = 1$. Med motsvarande Följdsats 7.7 för trippelintegraler får vi

$$\begin{aligned} \iiint_D x_3 dx_1 dx_2 dx_3 &= \iiint_{D_1} x_3 dx_1 dx_2 dx_3 + \iiint_{D_2} x_3 dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= \int_0^1 \left(\iint_{x_1^2 + x_2^2 < x_3^2} x_3 dx_1 dx_2 \right) dx_3 + \int_1^{\sqrt{2}} \left(\iint_{x_1^2 + x_2^2 < 2 - x_3^2} x_3 dx_1 dx_2 \right) dx_3 \\ &= \int_0^1 \pi x_3^3 dx_3 + \int_1^{\sqrt{2}} \pi x_3 (2 - x_3^2) dx_3 = \frac{\pi}{4} + \pi \left[-\frac{1}{4} (2 - x_3^2)^2 \right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Notera här tricket vi använt för att integrera $x_3(2 - x_3^2)$: det underlättar att inte multiplicera in x_3 här!

Även variabelbyten i trippelintegraler fungerar analogt med de för dubbelintegraler, så när som på att geometrin blir lite mer komplicerad. Givet en bijektiv variabelbytesfunktion $T : \tilde{D} \rightarrow D$ mellan det "nya" området $\tilde{D} \subset \mathbf{R}^3$ och det "gamla" området $D \subset \mathbf{R}^3$, där vi antar att alla 18 partiella derivator av T och T^{-1} existerar och är kontinuerliga, gäller variabelbytesformeln

$$\iiint_D f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 dx_3 = \iiint_{\tilde{D}} f(T(\mathbf{y})) |J_T(\mathbf{y})| dy_1 dy_2 dy_3.$$

Enda skillnaden är att Jacobianen J_T är 3/3-determinanten

$$J_T(\mathbf{y}) := \det \begin{bmatrix} \frac{\partial t_1}{\partial y_1} & \frac{\partial t_1}{\partial y_2} & \frac{\partial t_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial t_2}{\partial y_1} & \frac{\partial t_2}{\partial y_2} & \frac{\partial t_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial t_3}{\partial y_1} & \frac{\partial t_3}{\partial y_2} & \frac{\partial t_3}{\partial y_3} \end{bmatrix}.$$

Faktorn $|J_T(\mathbf{y})|$ betyder nu geometriskt den lokala volymsförstoringen som T ger runt \mathbf{y} . Vi nöjer oss här med att studera det mest användbara variabelbytet för trippelintegraler: det *rymdpolära* variabelbytet. Innan vi går in på detta behöver vi införa diverse kroklinjiga koordinater för att beskriva punkter i rummet som är standard.

Definition 9.4. Låt $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ vara en punkt i \mathbf{R}^3 . Vi tänker oss x_3 -axeln pekandes uppåt, x_1 -axeln pekandes mot oss och x_2 -axeln pekandes åt höger.

(i) Betrakta det vertikala planet som innehåller x_3 -axeln och som är roterat så att punkten (x_1, x_2, x_3) ligger i planet. Detta plan innehåller även punkten $(x_1, x_2, 0)$, det vill säga projektionen av \mathbf{x} i x_1x_2 -planet, och punkten $(0, 0, x_3)$, det vill säga projektionen av \mathbf{x} på x_3 -axeln. Betrakta nu rektangeln med hörn i origo, $(x_1, x_2, 0)$, \mathbf{x} och $(0, 0, x_3)$. Den kroklinjiga koordinaten r definieras som längden av diagonalen i denna rektangel

$$r := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$

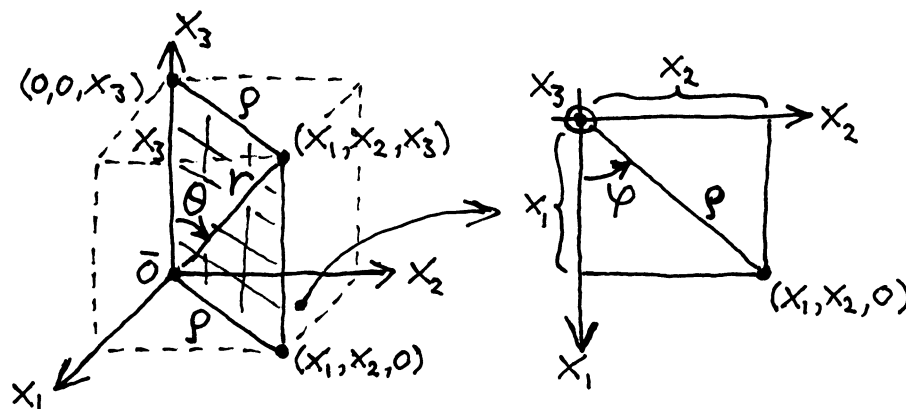
det vill säga r är *avståndet från \mathbf{x} till origo*. Den kroklinjiga koordinaten ρ definieras som längden av basen i denna rektangel

$$\rho := \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

det vill säga ρ är *avståndet från \mathbf{x} till x_3 -axeln*. Den kroklinjiga koordinaten θ definieras som vinkeln

$$\theta := \angle((0, 0, x_3), \mathbf{0}, \mathbf{x}) = \arccos(x_3/r),$$

det vill säga θ är *vinkeln från positiva x_3 -axeln till \mathbf{x}* . Observera att om \mathbf{x} ligger över x_1x_2 -planet ($x_3 > 0$) så är $0 \leq \theta < \pi/2$, medan om \mathbf{x} ligger under x_1x_2 -planet ($x_3 < 0$) så är $\pi/2 < \theta \leq \pi$.



(ii) Betrakta nu x_1x_2 -planet och den projicerade punkten $(x_1, x_2, 0)$ däri från (i). Den kroklinjiga koordinaten ρ är alltså längden av diagonalen i rektangeln med hörn i origo, $(x_1, 0, 0)$, $(x_1, x_2, 0)$ och $(0, x_2, 0)$. Vi definierar nu slutligen den kroklinjiga koordinaten φ som den planpolära vinkeln φ för punkten $(x_1, x_2, 0)$ i x_1, x_2 -planet såsom definierad i kapitel 8.2, det vill säga φ är *vinkeln moturs (sett uppifrån) från positiva x_1 -axeln till $(x_1, x_2, 0)$* .

Vi noterar att dessa kroklinjiga koordinater alltid ska uppfylla

$$r \geq 0, \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

De *rymdpolära koordinaterna* är (r, θ, φ) , och kallas även ibland de *sfäriska koordinaterna*. Vi har här även infört koordinaten ρ eftersom denna ofta är användbar, speciellt vid rotationssymmetri kring x_3 -axeln.

Anmärkning 9.5. Gör inte misstaget att till exempel $\theta = 3\pi/2$ för punkten $(0, -1, 0)$. Det är alltid den vinkel $\theta \leq \pi$ mellan positiva x_3 -axeln och vektorn från origo till punkten (den så kallade *ortsvektorn*) som används. Du ser att den korrekta vinkeln istället är $\theta = \pi/2$ (medan $\varphi = 3\pi/2$). Notera också att alla punkter i x_1x_2 -planet har $\theta = \pi/2$!

Lemma 9.6. *Varje punkt $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ som inte ligger i halvplanet*

$$N := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 ; x_2 = 0, x_1 \geq 0\}$$

är entydigt bestämd av sina rymdpolära koordinater

$$r > 0, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi.$$

Den rympolära variabelbytesfunktionen $(x_1, x_2, x_3) = T(r, \theta, \varphi)$ har koordinatfunktionerna

$$\begin{cases} x_1 = r \sin \theta \cos \varphi (= \rho \cos \varphi), \\ x_2 = r \sin \theta \sin \varphi (= \rho \sin \varphi), \\ x_3 = r \cos \theta, \end{cases}$$

och är alltså en bijektiv funktion

$$T : (0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi) \longrightarrow \mathbf{R}^3 \setminus N.$$

Bevis. För att bestämma (r, θ, φ) , givet $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, gör vi som följer. Räkna ut avståndet till origo r . Alla punkter med detta r utgör en sfär med radie r runt origo. Bestäm nu latituden för \mathbf{x} på sfären, vilket ger vinkeln θ . Här är $\theta = 0$ nordpolen, medan $\theta = \pi$ är sydpolen. Alla punkter med dessa r och θ utgör en cirkel parallell med ekvatorn på sfären. Med φ kan vi till slut bestämma punkten entydigt på denna cirkel.

Låt oss nu bestämma koordinatfunktionerna för T . Betrakta rektangeln i Definition 9.4(i). Av definitionen av r och θ ser vi att $x_3 = r \cos \theta$ och $\rho = r \sin \theta$. Å andra sidan har nu den projicerade punkten $(x_1, x_2, 0)$ i (ii) planpolära koordinater (ρ, φ) i x_1x_2 -planet, vilket ger uttrycken för x_1 och x_2 . \square

Övning 9.7. Beskriv mängderna

$$\begin{aligned} D_1 &:= \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 ; x_3 > \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right\}, \\ D_2 &:= \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 ; x_3 < -\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right\}, \\ D_3 &:= \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 ; |x_3| < \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right\}, \end{aligned}$$

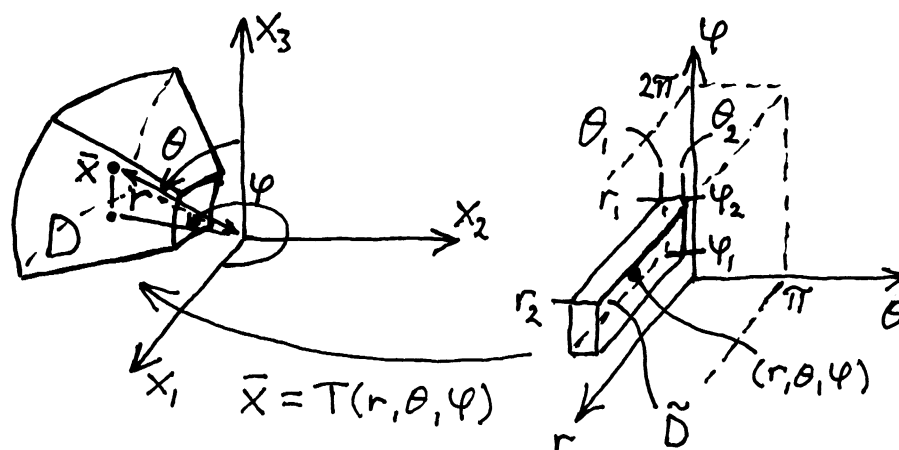
med rympolära koordinater.

Anmärkning 9.8. Koordinaterna (ρ, φ, x_3) (det vill säga planpolära koordinater för x_1x_2 -planet tillsammans med höjden x_3) kallas ibland för *cylinderkoordinater*. Då vi använder planpolära koordinater för x_1x_2 -planet i rummet, kallar vi alltså den radiella koordinaten för ρ .

Vid ett rympolärt variabelbyte i en trippelintegral är Jacobianen

$$\begin{aligned} J_T(r, \theta, \varphi) &:= \det \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{bmatrix} \\ &= r^2 \left(\cos \theta \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \varphi & -\sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi \end{bmatrix} + \sin \theta \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & -\sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi \end{bmatrix} \right) \\ &= r^2 (\cos \theta (\cos \theta \sin \theta) + \sin \theta (\sin^2 \theta)) = r^2 \sin \theta, \end{aligned}$$

där vi brutit ut r ur de två sista kolumnerna i den första matrisen, utvecklat denna längs tredje raden och sedan använt trigonometriska ettan ett antal gånger.



Sats 9.9 (Rymdpolära variabelbytessatsen). Låt $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = T(r, \theta, \varphi)$ vara det rymdpolära variabelbytet. Fixera $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$, $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq \pi$ och $0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 \leq 2\pi$ och betrakta den öppna mängden

$$\tilde{D} := \{(r, \theta, \varphi) \in \mathbf{R}^3 ; r_1 < r < r_2, \theta_1 < \theta < \theta_2, \varphi_1 < \varphi < \varphi_2\}.$$

Det polära variabelbytet T avbildar detta rätblock i det nya koordinatrummet bijektivt på en öppen mängd D i $x_1x_2x_3$ -rummet. Vi har att

$$\iiint_D f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 dx_3 = \iiint_{\tilde{D}} f(T(r, \theta, \varphi)) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi, \quad (9.3)$$

(observera Jacobianen $J_T(r, \varphi) = r^2 \sin \theta$) om $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ är kontinuerlig.

Bevis. Vårt bevis här är helt analogt med beviset för det planpolära variabelbytet Sats 8.9. Enda skillnaden är att volymen av D_j är lite mer komplicerad att beräkna här.

(i) Vi ska visa att det i varje litet rätblock

$$\tilde{D}_j := \{(r, \theta, \varphi) \in \mathbf{R}^3 ; a < r < b, \alpha < \theta < \beta, \gamma < \varphi < \delta\},$$

finns en punkt $(r_j, \theta_j, \varphi_j)$ sådan att volymen av bildmängden $D_j := T(\tilde{D}_j)$ av \tilde{D}_j under det rymdpolära variabelbytet är

$$|D_j| = r_j^2 \sin \theta_j |\tilde{D}_j|.$$

För att visa detta ska vi explicit räkna ut $|D_j|$. Vi betraktar först mängden

$$C_{R,\alpha} := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 ; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < R^2, x_3 > \sqrt{x_1^2 + x_2^2} / \tan \alpha \right\}.$$

Denna ses (rita figur!) vara området ovanför konen som i rymdpolära koordinater ges av $\theta = \alpha$ och innanför sfären $r = R$. Vi hävdar att dess volym är

$$|C_{R,\alpha}| = \frac{2\pi R^3}{3} (1 - \cos \alpha).$$

Det räcker att visa detta för $\alpha \leq \pi/2$ eftersom resten av sfären (med volym $4\pi R^3/3$), vilken är en roterad kopia av $C_{R,\pi-\alpha}$, då ses ha volymen

$$\frac{4\pi R^3}{3} - \frac{2\pi R^3}{3}(1 - \cos \alpha) = \frac{2\pi R^3}{3}(1 + \cos \alpha) = \frac{2\pi R^3}{3}(1 - \cos(\pi - \alpha)).$$

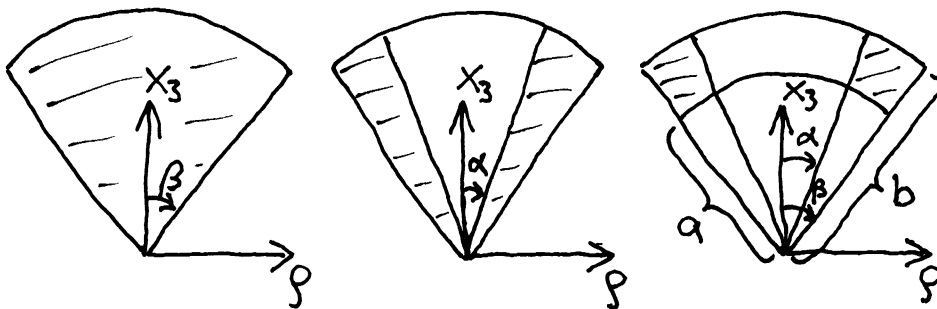
För att räkna ut $|C_{R,\alpha}|$ under antagandet $\alpha \leq \pi/2$ ska vi använda stavformeln (3.1). Eftersom området är rotationssymmetriskt runt x_3 -axeln är det lämpligt att använda den kroklinjiga koordinaten ρ i stället för x_1 och x_2 . Vi skriver därför sfärens och konens ekvation som

$$\rho^2 + x_3^2 = R^2 \quad \text{och} \quad x_3 = \rho / \tan \alpha$$

respektive. Genom att eliminera x_3 från dessa båda ekvationer ser vi att projektionen i x_1x_2 -planet blir cirkeln runt origo med radie $R \sin \alpha$. Tvärsnittet ovanför $(x_1, x_2, 0)$ blir med $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ intervallet $\rho / \tan \alpha < x_3 < \sqrt{R^2 - \rho^2}$. Enligt stavformeln är volymen

$$\begin{aligned} |C_{R,\alpha}| &= \iint_{x_1^2 + x_2^2 < (R \sin \alpha)^2} \left(\sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2} - \sqrt{x_1^2 + x_2^2} / \tan \alpha \right) dx_1 dx_2 \\ &= 2\pi \int_0^{R \sin \alpha} \left(\sqrt{R^2 - \rho^2} - \rho / \tan \alpha \right) \rho d\rho = 2\pi \left[-\frac{1}{3}(R^2 - \rho^2)^{3/2} - \frac{\rho^3}{3 \tan \alpha} \right]_{\rho=0}^{R \sin \alpha} \\ &= 2\pi \left(-\frac{1}{3}R^3 \cos^3 \alpha - \frac{R^3 \sin^3 \alpha}{3 \tan \alpha} + \frac{R^3}{3} \right) = \frac{2\pi R^3}{3}(1 - \cos \alpha) \end{aligned}$$

som önskat. Vi kan nu beräkna volymen $|D_j|$ av bilden av det lilla rätblocket \tilde{D}_j stegvis.



- (i) Volymen mellan konerna $\theta = \alpha$ och $\theta = \beta$ och innanför sfären $r = b$ blir

$$|C_{b,\beta}| - |C_{b,\alpha}| = \frac{2\pi b^3}{3}(\cos \alpha - \cos \beta).$$

- (ii) Volymen mellan konerna $\theta = \alpha$ och $\theta = \beta$ och mellan sfärerna $r = a$ och $r = b$ blir

$$(|C_{b,\beta}| - |C_{b,\alpha}|) - (|C_{a,\beta}| - |C_{a,\alpha}|) = \frac{2\pi}{3}(b^3 - a^3)(\cos \alpha - \cos \beta).$$

- (iii) Det lilla området D_j ses utgöra andelen $(\delta - \gamma)/(2\pi)$ av hela ringen runt x_3 -axeln från (ii), vilket ger

$$|D_j| = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)(\cos \alpha - \cos \beta)(\delta - \gamma).$$

Å andra sidan har det lilla rätblocket \tilde{D}_j i det ”nya” (r, θ, φ) - rummet volymen $(b-a)(\beta-\alpha)(\delta-\gamma)$ vilket ger

$$|D_j|/|\tilde{D}_j| = \frac{1}{3} \frac{b^3-a^3}{b-a} \frac{\cos\alpha-\cos\beta}{\beta-\alpha}.$$

Kom nu ihåg medelvärdessatsen från envariabelanalysen, som säger att om $g(x)$ är en deriverbar funktion på intervallet $[a, b]$ så finns $\xi \in (a, b)$ sådan att

$$\frac{g(b)-g(a)}{b-a} = g'(\xi).$$

Genom att tillämpa detta på funktionerna $g(x) = x^3$ och $g(x) = -\cos(x)$, ser vi att det finns $a < r_j < b$, $\alpha < \theta_j < \beta$ och $\varphi_j := (\gamma + \delta)/2$ så att

$$|D_j|/|\tilde{D}_j| = r_j^2 \sin \theta_j,$$

vilket skulle visas.

(ii) Resten av beviset är nu helt analogt med beviset för Sats 8.9. Vi antar först att \tilde{D} är ett begränsat rätblock och att f är kontinuerlig på det slutna höljet $\bar{\tilde{D}}$. Vi delar upp rätblocket

$$\tilde{D} = \tilde{D}_1 \cup \dots \cup \tilde{D}_k \cup \tilde{N},$$

där vi i varje litet rätblock \tilde{D}_j väljer punkten $(r_j, \theta_j, \varphi_j)$ och inför motsvarande punkt $\mathbf{x}_j := T(r_j, \theta_j, \varphi_j)$ i den lilla bildmängden D_j under det rymdpolära variabelbytet. Vi får enligt (i)

$$\sum_{j=1}^k f(\mathbf{x}_j) |D_j| = \sum_{j=1}^k f(T(r_j, \theta_j, \varphi_j)) r_j^2 \sin \theta_j |\tilde{D}_j|,$$

och vi ser att dessa båda summor är Riemannsummor för respektive integraler i (9.3). Låter vi nu förfiningen gå mot noll, får vi (9.3) efter gränsövergång enligt Sats 7.13. Precis som i steg (ii) i beviset för Sats 8.9 kan vi till sist ta bort de extra förutsättningarna på \tilde{D} och f ovan genom att använda Lemma 6.7 för trippelintegraler. \square

En vanlig användning av formeln för rymdpolärt variabelbyte är för att räkna ut en trippelintegral över ett klot $0 \leq r < R$ med radie R . Låter vi i Sats 9.9 $r_1 = 0$, $\theta_1 = 0$, $\varphi_1 = 0$ och $r_2 = R$, $\theta_2 = \pi$ och $\varphi_2 = 2\pi$ följer det att

$$\begin{aligned} & \iiint_{|\mathbf{x}| < R} f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= \int_0^R \left(\int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) r^2 \sin \theta d\varphi \right) d\theta \right) dr, \end{aligned}$$

om f är kontinuerlig på klotet $|\mathbf{x}| < R$. Vi har här använt i vänsterledet att halvplanet $N := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 ; x_2 = 0, x_1 \geq 0\}$ från Lemma 9.6 är en nollmängd, och därför att

$$\iiint_{|\mathbf{x}| < R} f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 dx_3 = \iiint_{|\mathbf{x}| < R, \mathbf{x} \notin N} f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 dx_3.$$

Exempel 9.10. Även för koniska områden går mycket bra att använda rympolära koordinater. Vi återvänder till glasstruten i exempel 9.3 och räknar ut dess massa på ett tredje sätt: med rympolärt variabelbyte. Vi ser (eller hur?) att glasstruten i rympolära koordinater ges av $r < \sqrt{2}$ och $\theta < \pi/4$. Vidare är densitetsfunktionen $\rho(r, \theta, \varphi) = r \cos \theta$. (Denna har inget att göra med avståndet ρ till x_3 -axeln.) Vi får att massan blir

$$\begin{aligned} \iiint_D f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 dx_3 &= \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{2\pi} r \cos \theta r^2 \sin \theta d\varphi \right) d\theta \right) dr \\ &= \left(\int_0^{\sqrt{2}} r^3 dr \right) \left(\int_0^{\pi/4} \sin \theta \cos \theta d\theta \right) \left(\int_0^{2\pi} 1 d\varphi \right) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Vi kan nu känna oss säkra på vad denna massa är!

Anmärkning 9.11. Notera att vi i exemplet använde oss av följande faktum (visa!). Om vi har en funktion med separerade variabler, det vill säga

$$f(x_1, x_2, x_3) = f_1(x_1)f_2(x_2)f_3(x_3),$$

definierad på ett rätblock $D = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times (a_3, b_3)$. Då är

$$\iiint_D f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 dx_3 = \left(\int_{a_1}^{b_1} f_1(x_1) dx_1 \right) \left(\int_{a_2}^{b_2} f_2(x_2) dx_2 \right) \left(\int_{a_3}^{b_3} f_3(x_3) dx_3 \right).$$

Det är viktigt att notera att alla gränserna måste vara fixa, det vill säga integrationsområdet måste vara ett rätblock, för att denna formel ska gälla.

Precis som för det planpolära variabelbytet, fås som ett specialfall av (9.3) även en *radialformel för trippelintegraler* som kan användas då funktionen är radiellt symmetrisk. En trevariabelfunktion $f(x_1, x_2, x_3)$ sägs här vara *radiell* om motsvarande funktion $f(r, \theta, \varphi)$, som erhålls efter variabelbytet, inte beror på θ eller φ . Vi skriver då $f(x_1, x_2, x_3) = f(r)$.

Följdsats 9.12 (Radialformeln för trippelintegraler). *Låt $f(x_1, x_2, x_3) = f(r)$ vara en radiell funktion, definierad på området $a < r < b$ mellan de två sfärerna $r = a$ och $r = b$, som är kontinuerlig och begränsad. Då är*

$$\iiint_{a < r < b} f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = 4\pi \int_a^b f(r)r^2 dr.$$

Bevis. Genom rympolärt variabelbyte (8.7) följt av itererad integration får vi

$$\begin{aligned} \iiint_{a < r < b} f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 &= \int_a^b \left(\int_0^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} 1 d\varphi \right) \sin \theta d\theta \right) f(r)r^2 dr \\ &= 2\pi \int_a^b \left(\int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \right) f(r)r^2 dr = 4\pi \int_a^b f(r)r^2 dr \end{aligned}$$

vilket visar radialformeln. □

Anmärkning 9.13. Analogt med anmärkning 5.10 är radialformeln för trippelintegraler ett specialfall av en mer allmän teknik som kallas *integration med avseende på nivåytor*. Vi noterar att om vi betecknar volymen av klotet med radie r med $v(r) = 4\pi r^3/3$, så är faktorn i formeln ovan $v'(r) = 4\pi r^2$.

A Generaliserade teckenväxlande integraler

Vi ska här ytterligare utveckla teorin i kapitel 6 genom att betrakta generaliserade integraler av teckenväxlande funktioner. Problemet här ligger i att man i Definition 3.9 kan råka ut för att

$$\int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_D f_1(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_D f_2(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \infty - \infty,$$

vilket saknar mening. För att få en tillfredsställande teori behöver vi lära oss mer om nollmängderna från kapitel 7. Följande begrepp är grundläggande inom integrationsteorin.

Definition A.1. Låt $D \subset \mathbf{R}^n$ vara en öppen mängd och låt $P = P(\mathbf{x})$ vara en utsaga som beror på $\mathbf{x} \in D$. Vi säger att P gäller *nästan överallt* (vilket förkortas n.ö.) i D , eller alternativt gäller för *nästan alla* $\mathbf{x} \in D$ (n.a. $\mathbf{x} \in D$), om undantagsmängden $\{\mathbf{x} \in D ; P(\mathbf{x}) \text{ är ej sann}\}$ är en nollmängd.

Exempel A.2. Om $f(\mathbf{x})$ är odefinierad bara på en nollmängd, säger vi att f är definierad nästan överallt.

Om $f_j(\mathbf{x}) \rightarrow f(\mathbf{x})$ för alla \mathbf{x} utanför en nollmängd, säger vi att $f_j \rightarrow f$ nästan överallt.

Lemma A.3. Låt $f : D \rightarrow \mathbf{R}$, där $D \subset \mathbf{R}^n$ är en öppen mängd, och antag att f är positiv, har öppen subgraf och har en konvergent integral $\int_D f < \infty$. Då är

$$N := \{\mathbf{x} \in D ; f(\mathbf{x}) = \infty\}$$

en nollmängd, det vill säga f är ändlig nästan överallt i D .

Bevis. Låt $0 < a < \infty$ och definiera den öppna (varför?) mängden

$$D_a := \{\mathbf{x} \in D ; f(\mathbf{x}) > a\}.$$

Betrakta nu subgrafan $\Omega := G_D(f) \subset \mathbf{R}^{n+1}$. Uppenbarligen är $D_a \times (0, a) \subset \Omega$, vilket visar att $|D_a| \leq a^{-1}|\Omega|$. Men för varje a är $N \subset D_a$ och genom att välja a stort kan $|D_a|$ fås godtyckligt litet eftersom vi antog att $|\Omega| < \infty$. Alltså är N en nollmängd. \square

Sats A.4. Låt $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ och $g : D \rightarrow \mathbf{R}$ vara två funktioner definierade på den öppna mängden $D \subset \mathbf{R}^n$, och antag att f och g är positiva och har öppna subgrafer. Då gäller att om $f = g$ nästan överallt i D så är

$$\int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_D g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Bevis. Betrakta de öppna subgraferna $\Omega_f := G_D(f)$ och $\Omega_g := G_D(g)$, och bilda snittet $\Omega := \Omega_f \cap \Omega_g$, vilket också är en öppen mängd. (Visa att $\Omega = G_D(\min(f, g))$!) Enligt antagande är $N := \{\mathbf{x} \in D ; f(\mathbf{x}) \neq g(\mathbf{x})\}$ en nollmängd. Eftersom $f \neq g$ bara på N ser vi att det finns nollmängder $N_f \subset N \times \mathbf{R}$ och $N_g \subset N \times \mathbf{R}$ sådana att $\Omega_f = \Omega \cup N_f$ och $\Omega_g = \Omega \cup N_g$. Av Sats 7.6 följer därför att

$$\int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = |\Omega_f| = |\Omega| = |\Omega_g| = \int_D g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

\square

Anmärkning A.5. För att visa satsen kan vi inte använda Följdsats 7.7 direkt eftersom det är fullt möjligt här att $D \setminus N$ inte är en öppen mängd. För ett konkret exempel, låt $D = (0, 1)$ och låt g vara den konstanta funktionen 1 medan f definieras som

$$f(x) := \begin{cases} 1 - 1/q, & \text{om } x = p/q \text{ och } p, q \in \mathbf{Z}^+ \text{ är relativt prima,} \\ 1, & \text{om } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Funktionen f har öppen subgraf och $f(x) = g(x)$ om och endast om x är ett irrationellt tal. Vidare följer det direkt från Sats 7.3(ii) att Q är en nollmängd, eftersom Q är uppräknelig. (Visa dessa påståenden!) Eftersom $f = g$ nästan överallt drar vi slutsatsen att $\int_0^1 f(x) dx = 1$.

Låt nu $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ vara en godtycklig (möjligen teckenväxlande och obegränsad) kontinuerlig funktion på en öppen mängd $D \subset \mathbf{R}^n$. Som tidigare kan vi bilda f 's positiva och negativa del f^\pm , vilka ses vara positiva och kontinuerliga funktioner på D . Vi kommer ihåg att

$$f(\mathbf{x}) = f^+(\mathbf{x}) - f^-(\mathbf{x}) \quad \text{och} \quad |f(\mathbf{x})| = f^+(\mathbf{x}) + f^-(\mathbf{x}).$$

Definition A.6. Låt $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ vara en kontinuerlig funktion på en öppen mängd $D \subset \mathbf{R}^n$. Vi säger att $\int_D f$ är *absolutkonvergent* om

$$\int_D |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x} := |G_D(|f|)| < \infty.$$

Övning A.7. Visa att $\int_D f$ är absolutkonvergent om och endast om $\int_D f^+$ och $\int_D f^-$ är konvergenta.

Definition A.8. Låt $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ vara en funktion definierad nästan överallt på en öppen mängd $D \subset \mathbf{R}^n$ och antag att det finns två positiva funktioner $f_1 : D \rightarrow \mathbf{R}$ och $f_2 : D \rightarrow \mathbf{R}$ med öppna subgrafer och konvergenta integraler sådana att

$$f(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{x}) \quad \text{för nästan alla } \mathbf{x} \in D.$$

Då definierar vi integralen av f över D som

$$\int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} := \int_D f_1(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_D f_2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = |G_D(f_1)| - |G_D(f_2)|.$$

Speciellt om f är kontinuerlig och $\int_D f$ är absolutkonvergent så kan vi välja $f_1 = f^+$ och $f_2 = f^-$.

Vi noterar att eftersom $\int_D f_1$ och $\int_D f_2$ antas vara konvergenta så är $f_1 - f_2$ definierad, det vill säga är inte det meningslösa uttrycket $\infty - \infty$, n.ö. enligt Lemma A.3.

Som i kapitel 3 kan vi visa att denna definition av integralen $\int_D f$ inte beror på valet av f_1 och f_2 . Antag nämligen att

$$f(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{x}) = g_1(\mathbf{x}) - g_2(\mathbf{x}) \quad \text{för nästan alla } \mathbf{x} \in D,$$

det vill säga $f_1(\mathbf{x}) + g_2(\mathbf{x}) = g_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{x})$ för n.a. $\mathbf{x} \in D$. Enligt Sats A.4 får vi då $\int_D f_1 + \int_D g_2 = \int_D g_1 + \int_D f_2$, vilket ger

$$\int_D f_1 - \int_D f_2 = \int_D g_1 - \int_D g_2,$$

eftersom alla integralerna antas vara konvergenta.

Sats A.9 (Fubini). Låt $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ vara en kontinuerlig funktion på en öppen och mängd $D \subset \mathbf{R}^n$. Antag att den generaliserade integralen $\int_D f$ är absolutkonvergent.

Låt $0 < k < n$ och beteckna med

$$I := \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbf{R}^k ; (x_1, \dots, x_n) \in D \text{ för något } (x_{k+1}, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^{n-k}\}$$

projektionen av D på $x_1 \dots x_k$ -rummet. Vidare, givet $(x_1, \dots, x_k) \in I$, låt

$$D_{x_1 \dots x_k} := \{(x_{k+1}, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^{n-k} ; (x_1, \dots, x_n) \in D\}$$

beteckna tvärsnittet av D parallellt med $x_{k+1} \dots x_n$ -rummet vid (x_1, \dots, x_k) . Då uppfyller $f_{x_1 \dots x_k} : D_{x_1 \dots x_k} \rightarrow \mathbf{R}$, där $f_{x_1 \dots x_k}(x_{k+1}, \dots, x_n) := f(x_1, \dots, x_n)$, förutsättningarna i Definition A.8 för nästan alla $(x_1, \dots, x_k) \in I$, och det gör även $A : I \rightarrow \mathbf{R}$, där

$$A(x_1, \dots, x_k) := \int \dots \int_{D_{x_1 \dots x_k}} f_{x_1 \dots x_k}(x_{k+1}, \dots, x_n) dx_{k+1} \dots dx_n,$$

även om A ej nödvändigtvis är kontinuerlig eller ens definierad överallt. Därmed existerar deras integraler, och vi har formeln

$$\begin{aligned} & \int \dots \int_D f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \\ &= \int \dots \int_I \left(\int \dots \int_{D_{x_1 \dots x_k}} f(x_1, \dots, x_n) dx_{k+1} \dots dx_n \right) dx_1 \dots dx_k. \quad (\text{A.1}) \end{aligned}$$

Anmärkning A.10. Det finns en viktig skillnad mellan denna sats, som kallas Fubinis sats, och motsvarande Sats 6.4 för generaliserade integraler av positiva funktioner som användes i kapitel 6, som kallas Tonellis sats. Med Tonellis sats kan man räkna ut den itererade integralen i högerledet och om resultatet är ändligt dra slutsatsen att integralen i vänsterledet är konvergent. I själva verket är högerledet ändligt om och endast om vänsterledet är det. För att däremot kunna använda Fubinis sats måste man veta *a priori* att integralen i vänsterledet är absolutkonvergent.

Bevis. Dela upp f i positiv och negativ del f^\pm . Då är $\int_D f^+$ och $\int_D f^-$ konvergenta, så enligt Tonellis sats är

$$\int_I \left(\int_{D_{x_1 \dots x_k}} f_{x_1 \dots x_k}^\pm \right) < \infty,$$

det vill säga integralen av $A^\pm := \int_{D_{x_1 \dots x_k}} f_{x_1 \dots x_k}^\pm$ över I är konvergent. Speciellt är $A^\pm < \infty$ för n.a. $\mathbf{x} \in I$ enligt Lemma A.3, det vill säga för n.a. $\mathbf{x} \in I$ är integralen

av $f_{x_1 \dots x_k}^\pm$ över $D_{x_1 \dots x_k}$ konvergent. Betraktar vi nu $f_{x_1 \dots x_k} = f_{x_1 \dots x_k}^+ - f_{x_1 \dots x_k}^-$, så följer det därför att dess integral över $D_{x_1 \dots x_k}$ är absolutkonvergent för n.a. $\mathbf{x} \in I$. Vi definierar för dessa $\mathbf{x} \in I$ funktionen $A = \int_{D_{x_1 \dots x_k}} f_{x_1 \dots x_k}$ och ser att för n.a. $\mathbf{x} \in I$ så är $A = A^+ - A^-$. Eftersom A^\pm har öppna subgrafer och konvergenta integraler enligt Tonellis sats är integralen av A över I definierad och lika med $\int_I A^+ - \int_I A^-$ enligt Definition A.8. Detta ger nu

$$\int_D f = \int_D f^+ - \int_D f^- = \int_I A^+ - \int_I A^- = \int_I A,$$

vilket skulle visas. \square

Exempel A.11. Vi demonstrerar här att förutsättningen att $\iint_D f$ är absolutkonvergent i Fubinis sats verkligen är nödvändig. Betrakta den generaliserade integralen

$$\iint_D \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2} dx_1 dx_2, \quad D = (0, 1) \times (0, 1).$$

Det lämnas som övning åt läsaren att visa att denna integral, som är generaliserad i $(0, 0)$, inte är absolutkonvergent.

Låt oss beräkna den itererade integralen $\int_0^1 (\int_0^1 f(x_1, x_2) dx_2) dx_1$. Den inre integralen blir

$$\begin{aligned} A(x_1) &= \int_0^1 \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2} dx_2 = \int_{x_2 = x_1 t} \frac{1}{x_1} \frac{1-t}{1+t^2} \frac{1-t}{1+t} dt \\ &= \frac{1}{x_1} \int_0^{1/x_1} \left(-\frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{t+1} \right) dt = \frac{1}{x_1} \left[-\frac{1}{2} \ln(1+t^2) + \ln(t+1) \right]_0^{1/x_1} \\ &= \frac{1}{2x_1} \ln \frac{(1+x_1)^2}{1+x_1^2} = \frac{1}{2x_1} \ln \left(1 + \frac{2x_1}{1+x_1^2} \right) = \frac{1}{1+x_1^2} + O(x_1). \end{aligned}$$

Vi ser härav att A existerar för alla $x \in (0, 1)$ och är en uppåt och nedåt begränsad positiv och kontinuerlig funktion, det vill säga det existerar $0 < m < M < \infty$ så att $m \leq A(x_1) \leq M$ för alla $x_1 \in (0, 1)$. Speciellt existerar även den yttre integralen, med ett värde

$$m \leq \int_0^1 A(x_1) dx_1 \leq M.$$

Notera speciellt att här existerar inte vänsterledet i (A.1), medan högerledet är väldefinierat och snällt. Att det inte finns någon möjlighet att ge en meningsfull definition av högerledet inser man då man försöker genomföra itererad integration med avseende på x_1 först istället, det vill säga försöker beräkna $\int_0^1 (\int_0^1 f(x_1, x_2) dx_1) dx_2$. Vi noterar här att $f(x_1, x_2) = -f(x_2, x_1)$ vilket innebär att

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2 = - \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1.$$

Genomför vi räkningen kommer vi därför att få ett tal i intervallet $[-M, -m]$. Itererad integration kommer alltså att ge olika resultat beroende på vilken variabel vi först integrerar med avseende på. Dessutom kommer vi inte få någon indikation på att integralen $\iint_D f$ i själva verket inte är absolutkonvergent!

B Halvkontinuerliga funktioner

Vårt mål i detta kompendium har varit att utveckla teorin för att integrera kontinuerliga funktioner över öppna mängder. Det visade sig dock redan Lemma 2.3 som vi anmärkte där att teorin går igen utan förändring för så kallade nedåt halvkontinuerliga funktioner. Detta är precis den klass av funktioner som har öppen subgraf, det vill säga identifierar vi en positiv funktion med dess subgraf så motsvarar kravet på funktionen att den ska vara nedåt halvkontinuerlig precis kravet på mängden $\Omega = G_D(f)$ att denna ska vara öppen. Låt oss här undersöka dessa halvkontinuerliga funktioner lite närmare.

Definition B.1. Låt $D \subset \mathbf{R}^n$ vara en öppen mängd.

- (i) Vi säger att en funktion $f : D \rightarrow (-\infty, \infty)$ är *kontinuerlig* i punkten $\mathbf{a} \in D$ om det för varje litet $\epsilon > 0$ existerar $\delta > 0$ sådant att

$$f(\mathbf{a}) - \epsilon \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a}) + \epsilon, \quad \text{om } |\mathbf{x} - \mathbf{a}| \leq \delta.$$

Ekvivalent är f kontinuerlig i \mathbf{a} om $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x})$ existerar med värdet $f(\mathbf{a})$.

- (ii) Vi säger att en funktion $f : D \rightarrow (-\infty, \infty]$ är *nedåt halvkontinuerlig* i punkten $\mathbf{a} \in D$, då $f(\mathbf{a}) < \infty$, om det för varje litet $\epsilon > 0$ existerar $\delta > 0$ sådant att

$$f(\mathbf{a}) - \epsilon \leq f(\mathbf{x}), \quad \text{om } |\mathbf{x} - \mathbf{a}| \leq \delta.$$

I fallet $f(\mathbf{a}) = \infty$ kräver vi att $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \infty$. Ekvivalent är f nedåt halvkontinuerlig i \mathbf{a} om $\lim_{\delta \rightarrow 0} \inf_{|\mathbf{x} - \mathbf{a}| \leq \delta} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$.

- (iii) Vi säger att en funktion $f : D \rightarrow [-\infty, \infty)$ är *uppåt halvkontinuerlig* i punkten $\mathbf{a} \in D$, då $f(\mathbf{a}) > -\infty$, om det för varje litet $\epsilon > 0$ existerar $\delta > 0$ sådant att

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a}) + \epsilon, \quad \text{om } |\mathbf{x} - \mathbf{a}| \leq \delta.$$

I fallet $f(\mathbf{a}) = -\infty$ kräver vi att $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = -\infty$. Ekvivalent är f uppåt halvkontinuerlig i \mathbf{a} om $\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{|\mathbf{x} - \mathbf{a}| \leq \delta} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$.

Funktionen f sägs vara *kontinuerlig på D* om den är kontinuerlig i varje punkt $\mathbf{a} \in D$, och analogt för (ii) och (iii).

Vi ser att en funktion är kontinuerlig om och endast om den både är nedåt och uppåt halvkontinuerlig, samt att f är nedåt halvkontinuerlig om och endast om $-f$ är uppåt halvkontinuerlig.

Exempel B.2. Låt $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ vara en envariabelfunktion som är kontinuerlig förutom i punkten ξ där f har en språngdiskontinuitet, så att högergränsvärdet $f(\xi+) := \lim_{x \rightarrow \xi+} f(x)$ och vänstergränsvärdet $f(\xi-) := \lim_{x \rightarrow \xi-} f(x)$ existerar men inte är lika. Då är f nedåt halvkontinuerlig i ξ om och endast om

$$f(\xi) \leq \min(f(\xi+), f(\xi-)),$$

och f är uppåt halvkontinuerlig i ξ om och endast om

$$f(\xi) \geq \max(f(\xi+), f(\xi-)).$$

Sats B.3. Låt $D \subset \mathbf{R}^n$ vara en öppen mängd och låt $f : D \rightarrow [0, \infty]$ vara en positiv funktion. Då är f nedåt halvkontinuerlig om och endast om dess subgraf $G_D(f) \subset \mathbf{R}^{n+1}$ är en öppen mängd.

Bevis. Vi har redan visat i Lemma 2.3 att $G_D(f)$ är öppen om f är nedåt halvkontinuerlig (även om lemmat endast formulerades för kontinuerliga funktioner). Antag omvänt att $G_D(f)$ är en öppen mängd och tag $\mathbf{a} \in D$ och ett litet $\epsilon > 0$. Betrakta punkten (\mathbf{a}, a_{n+1}) , där $a_{n+1} := f(\mathbf{a}) - \epsilon$. Vi kan här anta att $a_{n+1} = f(\mathbf{a}) - \epsilon > 0$ eftersom det annars inte finns något att visa. Vi ser att $(\mathbf{a}, a_{n+1}) \in G_D(f)$ och eftersom denna mängd är öppen finns en liten cylinder

$$C = \{(\mathbf{x}, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} ; |x_{n+1} - a_{n+1}| \leq h, |\mathbf{x} - \mathbf{a}| \leq \delta\},$$

där $h > 0$ och $\delta > 0$, sådan att $C \subset G_D(f)$. Det följer (varför?) att

$$f(\mathbf{x}) > a_{n+1} = f(\mathbf{a}) - \epsilon, \quad \text{då } |\mathbf{x} - \mathbf{a}| \leq \delta,$$

vilket visar att f är nedåt halvkontinuerlig. \square

Betrakta nu en positiv funktion f på en öppen mängd D . Om f är nedåt halvkontinuerlig är $\int_D f = 0$ om och endast om $f = 0$ överallt i D (varför?). För uppåt halvkontinuerliga funktioner har vi följande analoga resultat.

Sats B.4. Låt g vara en uppåt halvkontinuerlig funktion på en öppen och begränsad mängd $D \subset \mathbf{R}^n$, och antag att g är positiv och begränsad: $0 \leq g(\mathbf{x}) \leq C$ för alla $\mathbf{x} \in D$. Då är $\int_D g = 0$ om och endast om $g = 0$ nästan överallt i D .

Bevis. Notera att $g = C - (C - g)$, där C och $C - g$ är positiva och nedåt halvkontinuerliga funktioner. Enligt Definition A.8 är alltså

$$\int_D g = C|D| - \int_D (C - g).$$

Av Sats A.4 ser vi därför att $\int_D g = 0$ om $g = 0$ nästan överallt. Omvänt, antag att $\int_D g = 0$. Vi ser att detta innebär att supergrafan

$$\{(\mathbf{x}, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} ; \mathbf{x} \in D, g(\mathbf{x}) < x_{n+1} < C\},$$

vilken ses vara öppen eftersom g är uppåt halvkontinuerlig, har måttet $C|D|$. Vad vi behöver visa är att

$$N := \{\mathbf{x} \in D ; g(\mathbf{x}) \neq 0\}$$

är en nollmängd. Enligt Sats 7.3(ii) räcker det dock att visa att $N_j := \{\mathbf{x} \in D ; g(\mathbf{x}) > 2^{-j}\}$ är en nollmängd för varje $j \in \mathbf{Z}^+$, för $N = \bigcup_{j=1}^{\infty} N_j$.

Fixera j och låt $\epsilon > 0$. Genom att betrakta den undre randytan till en mängd U_k i den kanoniska sviten till supergrafan, ser vi att det finns en nedåt halvkontinuerlig funktion h sådan att $h \geq g$ och $\int_D h \leq \epsilon$, eftersom $|U_k| \rightarrow C|D|$ enligt antagande. Mer precist väljer vi k tillräckligt stort så att $|U_k| \geq C|D| - \epsilon$ och låter $h(\mathbf{x}) := \inf\{x_{n+1} ; (\mathbf{x}, x_{n+1}) \in \bar{U}_k\}$ då $(\bar{U}_k)_{\mathbf{x}} \neq \emptyset$, och i övrigt sätter vi $h(\mathbf{x}) := C$. Mängden

$$\Omega_j := \{\mathbf{x} \in D ; h(\mathbf{x}) > 2^{-j}\}$$

ses nu vara öppen, och vi har $N_j \subset \Omega_j$ och uppskattningen $|\Omega_j|2^{-j} = |\Omega_j \times (0, 2^{-j})| \leq \int_D h \leq \epsilon$. Eftersom j är fixt och $\epsilon > 0$ kan väljas godtyckligt litet ser vi att N_j är en nollmängd, vilket behövde visas. \square

Notera att en nedåt halvkontinuerlig funktion tillåts anta funktionsvärdet $+\infty$ medan en uppåt halvkontinuerlig funktion tillåts anta funktionsvärdet $-\infty$. Å andra sidan är det ingen större inskränkning att kräva att en nedåt halvkontinuerlig funktion ska vara nedåt begränsad, till exempel positiv, och vice versa för uppåt halvkontinuerliga funktioner.

Sats B.5. Låt $f : K \rightarrow \mathbf{R}$ vara en nedåt halvkontinuerlig funktion definierad på en kompakt mängd $K \subset \mathbf{R}^n$. Då finns det en punkt $\mathbf{a} \in K$ där f antar sitt minsta värde, det vill säga

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a}), \quad \text{för alla } \mathbf{x} \in K.$$

Speciellt är f en nedåt begränsad funktion på K .

Detta är motsvarigheten för nedåt halvkontinuerliga funktioner till *Satsen om största och minsta värde* [1, Följdsats, s.99] som gäller för kontinuerliga funktioner på kompakta mängder. Sats B.5 kan därför kallas *Satsen om minsta värde*. Analogt gäller *Satsen om största värde* för uppåt halvkontinuerliga funktioner på kompakta mängder. Bevisen för dessa är analoga med det för Satsen om största och minsta värde och vi går inte in på dessa här.

På grund av likheterna i definitionerna kan man förledas att tro att halvkontinuerliga funktioner är snarlika kontinuerliga. Följande exempel ger dock exempel på relativt vilda halvkontinuerliga funktioner.

Exempel B.6. Låt $A \in (0, \infty]$ vara ett fixt tal, möjligen $+\infty$, och låt $\epsilon > 0$. Då finns det en positiv, nedåt halvkontinuerlig envariabelfunktion $f : \mathbf{R} \rightarrow [0, A]$ med konvergent integral $\int_{\mathbf{R}} f(x) dx \leq \epsilon$ sådan att $f(q) = A$ för varje rationellt tal q .

Vi konstruerar f på följande sätt. Låt $(q_j)_{j=1}^{\infty}$ vara en uppräknings av de rationella talen \mathbf{Q} . Tag för varje j en nedåt halvkontinuerlig funktion $g_j : \mathbf{R} \rightarrow [0, A]$ sådan att

$$g_j(q_j) = A \quad \text{och} \quad \int_{\mathbf{R}} g_j(x) dx \leq 2^{-j}\epsilon.$$

Sätt sedan $f_j(x) := \max(g_1(x), g_2(x), \dots, g_j(x))$ och låt $f(x) := \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x)$. Vi ser att $0 \leq f(x) \leq A$ och att $f(q_j) \geq f_j(q_j) \geq g_j(q_j) = A$. Eftersom $f_j \nearrow f$ följer det av Lemma 3.4 att f är en nedåt halvkontinuerlig funktion. Dessutom är $f_j \leq g_1 + \dots + g_j$, så att

$$\int_{\mathbf{R}} f_j \leq \sum_{i=1}^j \int_{\mathbf{R}} g_i \leq \sum_{i=1}^j 2^{-i}\epsilon = (1 - 2^{-j})\epsilon,$$

och därmed får vi att $\int_{\mathbf{R}} f = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}} f_j \leq \epsilon$.

Funktioner g_j som ovan är inte svåra att konstruera. Låt oss ge två exempel.

(i) Låt $A = \infty$ och $\epsilon = 1$ och sätt

$$g_j(x) := 2^{-j} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{|x - q_j|(1 + |x - q_j|)}}.$$

Dessa ses uppfylla förutsättningarna och ger oss exempel på en nedåt halvkontinuerlig positiv funktion med integral $\int_{\mathbf{R}} f(x) dx \leq 1$ sådan att $f(q) = +\infty$ i varje rationell punkt. Notera att det följer av Lemma A.3 att \mathbf{Q} är en nollmängd på linjen.

(ii) Låt $A = 1$, $\epsilon < 1$ och sätt

$$g_j(x) := \chi_{(q_j - \epsilon/2^{j+1}, q_j + \epsilon/2^{j+1})}(x) := \begin{cases} 1, & |x - q_j| < \epsilon/2^{j+1}, \\ 0, & |x - q_j| \geq \epsilon/2^{j+1}. \end{cases}$$

Dessa uppfyller också förutsättningarna. Betrakta nu den konstruerade funktionen f på intervallet $(0, 1)$. Detta är en nedåt halvkontinuerlig funktion $f : (0, 1) \rightarrow [0, 1]$ med integral

$$\int_0^1 f \leq \int_{\mathbf{R}} f \leq \epsilon < 1.$$

Trots detta är $f(q) = 1$ i varje rationell punkt. Denna funktion är i princip identisk med konstruktionen i [1, exempel 4.2, s.155].

Avslutningsvis gör vi en jämförelse av integralen definierad i detta kompendium med Riemannintegralen och Lebesgueintegralen. Vi nöjer oss här med att betrakta begränsade funktioner på ett öppet och begränsat intervall $(a, b) \subset \mathbf{R}$, och definierar följande klasser av sådana funktioner.

(C) Detta är den klass av funktioner som man i en första kurs behöver kunna integrera.

$$C := \{f : (a, b) \rightarrow \mathbf{R} ; f \text{ är begränsad och kontinuerlig}\}$$

(R) Detta är klassen av funktioner från Definition 4.2 och som vanligen betraktas i envariabelintegrationsteorin.

$$R := \{f : (a, b) \rightarrow \mathbf{R} ; f \text{ är begränsad och Riemannintegrerbar}\}$$

(H) Detta är den klass av funktioner vi betraktar i detta kompendium, mer precist tänker jag mig här de begränsade funktioner som uppfyller förutsättningarna i Definition A.8.

$$H := \{f : (a, b) \rightarrow \mathbf{R} ; f \text{ är begränsad och det finns n.h.k.} \\ \text{och begränsade } f_1 \geq 0, f_2 \geq 0 \text{ sådana att } f = f_1 - f_2 \text{ n.ö.}\}$$

Observera att detta är ekvivalent med att f kan skrivas som summan av en begränsad och nedåt halvkontinuerlig funktion, och en begränsad och uppåt halvkontinuerlig funktion.

(L) Detta är klassen av Lebesgueintegrabla funktioner. Det är Lebesgueintegralen man vanligen använder sig av inom matematiken då man arbetar med irreguljära mängder och funktioner.

$$L := \{f : (a, b) \rightarrow \mathbf{R} ; f \text{ är begränsad och Lebesgueintegrerbar}\}$$

Det är visat att det är omöjligt att avgöra huruvida det finns (begränsade) funktioner som inte är Lebesgueintegrerbara, om man inte tillåter sig att använda det så kallade urvalsaxiomet.

Dessa klasser förhåller sig till varandra enligt

$$C \subsetneq R \subsetneq H \subsetneq L,$$

där alla delmängder är strikta. Det som behöver kommenteras här är varför $R \subset H$. För att se detta, låt f vara begränsad och Riemannintegrerbar och definiera funktionerna

$$\underline{f}(x) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf_{|y-x| \leq \delta} f(y), \quad \overline{f}(x) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{|y-x| \leq \delta} f(y).$$

Dessa kallas för f 's *undre hölje* och *övre hölje* respektive. Definiera vidare för en funktion $g : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ mängderna

$$G_{(a,b)}^-(g) := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 ; a < x < b, y < g(x)\},$$

$$G_{(a,b)}^+(g) := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 ; a < x < b, y > g(x)\}.$$

Dessa kallas för g 's *obegränsade subgraf* och g 's *obegränsade supergraf* respektive.

Övning B.7. (i) Visa att \underline{f} är en nedåt halvkontinuerlig funktion, vars obegränsade subgraf är det inre av $G_{(a,b)}^-(f)$, och att \overline{f} är en uppåt halvkontinuerlig funktion, vars obegränsade supergraf är det inre av $G_{(a,b)}^+(f)$. Visa även att $\underline{f}(x) \leq f(x) \leq \overline{f}(x)$ där $\underline{f}(x) = f(x)$ om och endast om f är nedåt halvkontinuerlig i x och $\overline{f}(x) = f(x)$ om och endast om f är uppåt halvkontinuerlig i x .

(ii) Visa, genom att generalisera Sats 4.4, att för en godtycklig begränsad funktion f är $\int_a^b \underline{f}$ lika med Riemanns underintegral $\sup_{t_1 \leq f} \int_a^b t_1$, medan $\int_a^b \overline{f}$ är lika med Riemanns överintegral $\inf_{t_2 \geq f} \int_a^b t_2$.

(iii) Visa med (i), (ii) och Sats B.4 att en begränsad funktion är Riemannintegrerbar om och endast om den är kontinuerlig nästan överallt.

(iv) Vad är \underline{f} och \overline{f} i exempel B.6(ii) och hur visar detta att f där inte är Riemannintegrerbar?

Eftersom en Riemannintegrerbar funktion f är kontinuerlig nästan överallt är $f = \underline{f} = \overline{f}$ n.ö., där \underline{f} är nedåt halvkontinuerlig och \overline{f} är uppåt halvkontinuerlig. Detta visar att $R \subset \overline{H}$.

Övning B.8. Betrakta följande två snarlika påståenden för en begränsad funktion $f : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$.

(i) Funktionen f är kontinuerlig nästan överallt i (a, b) .

(ii) Det finns en kontinuerlig funktion $g : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ sådan att $f = g$ nästan överallt i (a, b) .

Observera att enligt ovan betyder (i) precis att f är Riemannintegrerbar. Låt f_1 vara funktionen som är 1 för alla irrationella tal och 0 för alla rationella tal. Låt f_2 vara en funktion som i exempel B.2 med språng i $a < \xi < b$. Låt till sist f_3 vara funktionen f i anmärkning A.5. Visa att f_1 uppfyller (ii) men ej (i), att f_2 uppfyller (i) men ej (ii) och att f_3 uppfyller både (i) och (ii). Alltså, att vara kontinuerlig n.ö. har inget att göra med att vara lika med en kontinuerlig funktion n.ö.

En fördel med H gentemot R är att teorin för generaliserade integraler och itererad integration är naturligare i H än i R . Notera att vårt bevis för Tonellis sats 6.4 här går igenom för alla funktioner som har öppen subgraf, inte bara de kontinuerliga, och att f_{x_1} och A i satsen då också har öppna subgrafer. På samma sätt går beviset för Fubinis sats igenom för alla funktioner som uppfyller förutsättningarna i Definition A.8, inte bara de kontinuerliga, och funktionerna i satsen uppfyller då även de förutsättningarna i Definition A.8. Vår klass H kan också betraktas som ett första steg mot den kompletta integrationsteorin, det vill säga L , där man betraktar mått av mycket mer allmänna mängder än de öppna.

Referenser

- [1] Böiers, L-C., Claesson, T. Analys för funktioner av flera variabler. Lund, 1986.