Riemann eller Lebesgue?

Andreas Rosén

Linköping University

Oktober 2011

Riemannintegralens definition

En variabel:

- Indelning av ett kompakt intervall $[a, b]$ görs.
- Trappfunktioners integral definieras.
- $f(x)$ är Riemannintegrerbar om över- och undertrappfunktioner med integraler godtyckligt nära varandra existerar.
- Kontinuerliga funktioner är Riemannintegrerbara. Beviset använder likformig kontinuitet och kompakthet.
- Generaliserade integraler definieras genom att gå i gräns med a eller b.

Flera variabler:

- Analogt med en variabel för ett axelparallellt kompakt rätblock.
- För allmän begränsad mängd: f utvidgas med 0 till ett omgivande rätblock. (Instängningsidén lite problematisk i flera variabler.)
- (Positiva) generaliserade integraler definieras med hjälp av uttömmande sviter.

pre-Lebesguemåttets definition

Låt $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ ($\mathbf{R}^{n+1}$ för flervariabelanalys) vara en öppen mängd.
Definiera den kanoniska sviten

$$U_0 \subset U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \ldots \subset \Omega$$

- Välj de dyadiska kvadrater Q med sidlängd 2^{-j} sådana att $\overline{Q} \subset \Omega$.
- I fallet då Ω är obegränsad är det lämpligt att också kräva $\operatorname{dist}(Q, 0) \leq j$.
- Låt U_j vara det inre av det slutna höljet av unionen av alla dessa kuber Q.

Definition (mått av öppen mängd)

$|\Omega| := \lim_{j\to\infty} |U_j|$, med uppenbar tolkning av arean $|U_j|$.

pre-Lebesgueintegralens definition: positiva fallet

Låt $f : D \to \mathbf{R}$ vara en kontinuerlig funktion på en öppen mängd $D \subset \mathbf{R}$ (eller $D \subset \mathbf{R}^n$ i flervariabelanalys).
Under förutsättning att $f \geq 0$ definierar vi f:s subgraf

$$G_D(f) := \{(x, t) \in \mathbf{R}^2 \ ; \ x \in D, 0 < t < f(x)\},$$

vilket är en öppen mängd. (Detta gäller mer allmänt då f är nedåt halvkontinuerlig på en öppen mängd.)

Definition (positiv integrand)

För $f \geq 0$ som har öppen subgraf definierar vi pre-Lebesgueintegralen $\int_D f(x)dx := |G_D(f)|$. (Även om f eller D är obegränsad.)

pre-Lebesgueintegralens definition: teckenväxlande fallet

Låt $f : D \to \mathbf{R}$ vara en kontinuerlig funktion på en öppen mängd $D \subset \mathbf{R}$ (eller $D \subset \mathbf{R}^n$ i flervariabelanalys).
Vi definierar f:s positiva och negativa delar

$$\begin{cases} f^+ := \max(f, 0), \\ f^- := -\min(f, 0), \end{cases}$$

så att $f = f^+ - f^-$, där $f^\pm \geq 0$ är kontinuerliga.

Definition (teckenväxlande integrand)

För en funktion $f = f_1 - f_2 : D \to \mathbf{R}$, där $f_1, f_2 \geq 0$ har öppna subgrafer, med ändliga mått, definierar vi pre-Lebesgueintegralen
$\int_D f(x)dx := |G_D(f_1)| - |G_D(f_2)|$

Kommentarer om definitionerna

- Öppna mängder, snarare än kompakta mängder, är mest naturliga/grundläggande vid area/volymberäkningar. (Ingen rand, bara inre punkter!) Därför bör dessa vara i fokus i integrationsteorin.
- Analysstudenter har knappast behov av att integrera mer allmänna funktioner än kontinuerliga. Klassen av funktioner som betraktas i integrationsteorin bör vara så lite större än de kontinuerliga som möjligt.
- Kopplingen mellan integral och area/volymberäkning framgår tydligt i pre-Lebesgueintegralens definition.
- Den för pre-Lebesgueintegralen nödvändiga uppdelningen i positiv och negativ del förtydligar också integralens tolkning.
- Enhetlighet: till skillnad från Riemannintegraler används uttömmande sviter och uppdelning i positiv och negativ del genomgående, inte bara för generaliserade integraler.

Huvudsatsen för pre-Lebesgueintegralen

Sats

Om $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \ldots \subset \Omega$ *är öppna mängder som tömmer ut* Ω *så är* $\lim_{j\to\infty} |\Omega_j| = |\Omega|$.

Det är i beviset av denna nyckelsats som kompakthetsargument används. Till skillnad från Riemannintegralen är kontinuerliga funktioner på öppna mängder "trivialt" pre-Lebesgueintegrerbara. (De har öppen subgraf $\Leftrightarrow$ är nedåt halvkontinuerliga.).

Följdsats (Monoton konvergens)

Om D *är öppen och* $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \ldots \to f$ *på* D, *där* f_j *är kontinuerliga, så har* f *öppen subgraf och* $\int_D f_j(x)dx \to \int_D f(x)dx$.

För Riemannintegralen behöver inte en sådan gränsfunktion vara integrerbar.

Stavformeln

Sats (Stavformeln)

Låt $\Omega \subset \mathbf{R}^{n+1}$ *vara öppen, med projektion* D *på* $\mathbf{R}^n$ *och tvärsnittslängd* $\ell(x)$, $x \in D$, *längs* x_{n+1}*-axeln. Då har* $\ell : D \to \mathbf{R}$ *öppen subgraf och*

$$|\Omega| = \int_D \ell(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n.$$

Bevis är enkelt för en mängd i den kanoniska sviten $U_j \subset \Omega$. För Ω följer sedan stavformeln genom gränsövergång med huvudsatsen.
OBS: $\ell(x)$ behöver inte vara kontinuerlig, eller ens Riemannintegrerbar.
Vad som följer av stavformeln:

- Additivitet för pre-Lebesgueintegralen: $\int_D (f+g) = \int_D f + \int_D g$.
- Integralen av en teckenväxlande funktion är väldefinierad.
- Formeln för måttet av områden mellan två grafer: $|\Omega| = \int_D (f(x) - g(x)) dx$.

Nollmängder

Definition

En mängd N är en nollmängd om för varje $\epsilon > 0$ finns en öppen mängd $\Omega \supset N$ med $|\Omega| \le \epsilon$.

$$\mathbf{R}^n = D^o \cup \partial D \cup (D^c)^o,$$

i praktiken med D^o, $(D^c)^o$ öppna och ∂D nollmängd.

- Huvudexempel: grafer av kontinuerliga funktioner i $\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3, \ldots$. (Använd stavformeln.)
- Uppräkneliga unioner av nollmängder är nollmängder. (Använd huvudsatsen.) För Jordannollmängder i Riemannintegrationsteorin gäller inte detta.
- Om N är en nollmängd i $\mathbf{R}^n$ så är $N \times \mathbf{R}$ en nollmängd i $\mathbf{R}^{n+1}$. ($\mathbf{R} = \bigcup_j (-j, j)$) Av detta följer klart att nollmängder kan försummas vid integration.

Uppdelning och variabelbyte

Följande bör i högre grad än vad som görs betonas som en beräkningsteknik i sig, vilket görs om fokus ligger på öppna mängder.

Sats

Antag $f : D \to \mathbf{R}$ kontinuerlig på öppen mängd, och att $D = D_1 \cup \ldots \cup D_k \cup N$ med öppna disjunkta D_j och nollmängd N. Då är

$$\int_D f = \int_{D_1} f + \ldots + \int_{D_k} f.$$

Teoretisk användning:

- I en variabel används uppdelning och medelvärdessatsen för integraler för att bevisa analysens huvudsats: $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$.
- I en eller fler variabler används uppdelning och likformig kontinuitet för att visa att Riemannsummor konvergerar mot integralen. Variabelbytessatsen visas på sedvanligt sätt.

Skivformeln och itererad integration

Helt analogt med stavformeln visas:

Sats (Skivformeln)

Låt $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ vara öppen, med projektion I på x_1-axeln och tvärsnittsarea $A(x_1)$, $x_1 \in I$, parallellt med x_2x_3-planet. Då har $A : I \to \mathbf{R}$ öppen subgraf och

$$|\Omega| = \int_I A(x_1)dx_1.$$

Genom att låta $\Omega = G_D(f)$ vara subgrafen till en given funktion $f : D \to \mathbf{R}$ erhålls från skivformeln formeln för itererad integration:

$$\iint_D f(x_1, x_2)dx_1 dx_2 = \int_I \left(\int_{D_{x_1}} f(x_1, x_2)dx_2 \right) dx_1.$$

Teorin för generaliserade integraler kräver knappt någon specialbehandling. Tonellis sats för positiva generaliserade integraler följer direkt. Fubinis sats för teckenväxlande absolutkonvergenta integraler använder klassen H nedan.

Överkurs: på väg mot den fulla Lebesgueintegralen

- Vad pre-Lebesgueintegralen klarar av: $|\Omega|$ för öppna mängder, och $\int_D f$ av kontinuerliga f över öppna D.
- Vad den fulla Lebesgueintegralen klarar av: $|E|$ för "helt godtyckliga" mängder, och $\int f$ för "helt godtyckliga" f. (Urvalsaxiomet?)

Lite bortom pre-Lebesgueintegralen har vi följande.

Definition (Klassen H)

Låt $f : E \to \mathbf{R}$ vara en funktion på en mängd E. Antag att det finns en öppen mängd D sådan att $E \triangle D = (E \cup D) \setminus (E \cap D)$ är en nollmängd, och positiva funktioner $f_1, f_2 : D \to \mathbf{R}$ med öppna subgrafer, med ändliga mått, sådana att $f = f_1 - f_2$ på $E \cap D$. Definiera då integralen $\int_E f dx := |G_D(f_1)| - |G_D(f_2)|$.

Användning: integration över områden med rand som är nollmängd, integration av funktioner som är diskontinuerliga på en sluten nollmängd.

Kommentarer om klassen H

H som i Halvkontinuerlig eller som i Halvvägs...

- Man visar förstås oberoende av det exakta valet av D, f_1 och f_2.
- Klassen H ger en snygg Fubinis sats (itererad integration av absolutkonvergenta generaliserade integraler) för kontinuerliga funktioner på öppna mängder, dvs den inre integralen är en funktion från klassen H.
- Klassen H innehåller strikt alla Riemannintegrerbara funktioner: en Riemannintegrerbar funktion är lika med sitt övre hölje, vilket är en nedåt halvkontinuerlig funktion, nästan överallt. (Den är också nästan överallt lika med sitt undre hölje, en uppåt halvkontinuerlig funktion.)
- Till skillnad från Riemannintegralen, är vi redan lite på väg mot den fulla Lebesgueintegralen. (Yttre) Lebesguemåttet av en godtycklig mängd E definieras i en avancerad integrationsteorikurs som $|E| := \inf_{\Omega \supset E} |\Omega|$, där infimum tas över öppna omgivningar.

Diskussion

- "Ensidiga" utömmande sviter för öppna mängder kontra "tvåsidig" instängning?
- Indelning i grafrummet $\mathbf{R}^{n+1}$ kontra uppdelning i definitionsrummet $\mathbf{R}^n$?
- Hur bör pre-Lebesgueintegralen undervisas för olika studenter? Hur mycket detaljerna om kontinuitets- och öppenhetsantaganden och måttets definition bör ges?
- ...