MFP II: FUNKTIONENTHEORIE, FEUER UND WELLEN

JULIE ROWLETT

[1]

1. Differenzierbarkeit auf $\mathbb{C}$

Definition 1.1. Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Für ein $z_0 \in \mathbb{C}$ ist f (komplex) differenzierbar beziehungsweise *holomorph* falls der Grenzwert

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert. In diesem Fall ist $f'(z_0)$ durch diesen Grenzwert definiert.

Lemma 1.2. *Es sei f holomorph in z_0. Dann ist f auch stetig in z_0.*

Proof. Wir betrachten

$$\lim_{z \to z_0} f(z) - f(z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = 0.$$

□

Eine äquivalente Definition von Holomorphie in einem Punkt z_0 ist: Es existiert eine stetige Funktion $\Delta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (wir nennen diese Funktion nicht zufällig Δ, wir werden bald sehen, warum), sodass Δ in z_0 stetig ist und

$$f(z) = f(z_0) + \Delta(z)(z - z_0)$$

für alle z in einer Umgebung von z_0 gilt. Für den Beweis nehmen wir zunächst an, dass f in z_0 holomorph ist. Dann erhalten wir:

$$\Delta(z) := \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \quad z \neq z_0, \quad \Delta(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Umgekehrt gilt:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \Delta(z) = \Delta(z_0).$$

Da wir komplexe Zahlen multiplizieren und dividieren können und dabei dieselben Regeln wie in $\mathbb{R}$ gelten, folgt aus der Analysis I für $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$:

(1) sind f sowie g in z_0 holomorph, so auch $f + g$ und es gilt:

$$(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$$

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + g'(z_0)f(z_0)$$

(2) Gilt ferner $f(z_0) \neq 0$, so ist auch f/g holomorph und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{g'(z_0)f(z_0) - f'(z_0)g(z_0)}{(f(z_0))^2}.$$

(3) Mit f in $g(z_0)$ und g in z_0 ist auch $f \circ g$ in z_0 holomorph und es gilt

$$(f \circ g)'(z_0) = f'(g(z_0))g'(z_0).$$

Definition 1.3. Eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die auf *ganz* $\mathbb{C}$ holomorph ist, heißt ... (can you guess?) *ganz!*

---

[1] December 5, 2018

Da die Funktionen $f(z) = z$ sowie $c(z) = c$ ganz sind, wobei $c \in \mathbb{C}$ eine Konstante ist, folgt sofort, dass jedes Polynom ganz ist. Rationale Funktionen sind holomorph in jedem Punkt, in dem der Nenner nicht verschwindet.

Definition 1.4. Eine Funktion $f : U \to V$, wobei U, V zwei offene Teilmengen (d.h. Gebiete) von $\mathbb{C}$ sind, heißt *biholomorph* auf U, falls f holomorph und bijektiv auf U und f^{-1} holomorph auf V ist.

Proposition 1.5. *Es sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf dem Gebiet $U \subset \mathbb{C}$, sodass $f'(z) \neq 0$ $\forall z \in U$. Dann gilt: Für alle $z_0 \in U$ gibt es eine Umgebung $U(z_0)$ von z_0 sodass $f(z) = f(z_0)$ für $z \in U(z_0)$ genau dann, wenn $z = z_0$.*

Proof. Da f holomorph ist und $f'(z_0) \neq 0$ für $z_0 \in U$, gilt lokal

$$f(z) = f(z_0) + \Delta(z)(z - z_0), \quad \Delta(z_0) \neq 0.$$

Eine kleine Bemerkung: Dieses Δ hängt in der Tat von dem Punkt z_0 ab, d.h. genauer sollte man Δ als Δ_{z_0} schreiben. Da diese Proposition lokal ist, ist das unwichtig. Es gibt also ein $\delta > 0$ sodass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < \delta$ und

$$|\Delta(z) - \Delta(z_0)| < \frac{\Delta(z_0)}{2} \implies |\Delta(z)| > |\Delta(z_0)|/2 > 0,$$

also gilt auch

$$|f(z) - f(z_0)| = |\Delta(z)||z - z_0| > 0 \ \forall z \in \mathbb{C} \text{ mit } 0 < |z - z_0| < \delta.$$

Dementsprechend kann man setzen

$$U(z_0) := B_\delta(z_0).$$

$\square$

1.1. **Vergleich mit der Differenzierbarkeit auf $\mathbb{R}^2$.** Wir können $\mathbb{R}^2$ in kanonischer Weise mit $\mathbb{C}$ identifizieren. Wie ist also das Verhältnis zwischen der Differenzierbarkeit bzgl. $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{C}$? Aye, there's the rub. Genau deswegen verwenden wir dieses Δ, was an den Laplace-Operator erinnern soll, weil holomorphe Funktionen differenzierbar bzgl. $\mathbb{R}^2$ sind *und* eine *zusätzliche partielle Differenzialgleichung* erfüllen müssen. Diese Gleichung ist mit der Laplace-Gleichung sowie dem Laplace-Operator verbunden.

Definition 1.6. Es sei $f = g + ih : U \to \mathbb{C}$, wobei U ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und g, h jeweils reellwertig seien. Dann ist f $\mathbb{R}^2$-differenzierbar in $z_0 = x_0 + iy_0$ (was *nicht* gleich holomorph bedeutet!) genau dann, wenn es zwei stetige Funktionen Δ_1, Δ_2 von U in $\mathbb{C}$ gibt sodass

$$f(z) = f(z_0) + \Delta_1(z)(x - x_0) + \Delta_2(z)(y - y_0), \quad \forall z = x + iy \in U.$$

Die übliche Definition, dass eine Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ differenzierbar in (x_0, y_0) ist, ist, dass es eine 2×2 Matrix A gibt, sodass gilt

$$F(x, y) - F(x_0, y_0) = A(z - z_0) + o(z),$$

wobei $(x, y) = z$, $(x_0, y_0) = z_0$ und $o(z) \to 0$ als $z \to z_0$, was äquivalent zu der Aussage ist, dass es eine Matrix $A(z) = [a_{ij}(z)]$ gibt, sodass $a_{ij} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen in z_0 sind.
So ist also jede $\mathbb{R}^2$-differenzierbare Funktion auf $\mathbb{C}$ in kanonischer Weise mit einer differenzierbaren Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ identifiziert.
Es seien

$$E := \frac{1}{2}(\Delta_1 + i\Delta_2), \quad \Delta := \frac{1}{2}(\Delta_1 - i\Delta_2),$$

dann rechnet man leicht nach, dass f genau dann in z_0 $\mathbb{R}^2$-differenzierbar ist, wenn

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\Delta(z) + (\bar{z} - \bar{z}_0)E(z). \tag{1.1}$$

Man sieht ebenso, dass

$$\Delta_1 = \Delta + E, \quad \Delta_2 = E - \Delta, \quad \overline{\Delta} = E.$$

Definition 1.7. Die Werte

$$\Delta(z_0) := \frac{\partial f}{\partial z}(z_0), \quad E(z_0) := \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)$$

nennt man *die Wirtinger-Ableitungen* von f im Punkt z_0.

Natürlich ist

$$f_x := g_x + ih_x, \quad f_y := g_y + ih_y,$$

also

$$f_z = \frac{1}{2}(f_x - if_y), \quad f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(f_x + if_y).$$

Jetzt können wir $\mathbb{C}$- und $\mathbb{R}^2$-Differenzierbarkeit vergleichen.

Satz 1.8. *Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ ist holomorph in $z_0 \in U$ (U ist wie immer ein Gebiet) genau dann, wenn f $\mathbb{R}^2$-differenzierbar ist und ferner gilt:*

$$f_{\bar{z}}(z_0) = 0.$$

In diesem Fall ist

$$f'(z_0) = f_z(z_0).$$

Proof. Laut der Definition der $\mathbb{R}^2$-Differenzierbarkeit wissen wir schon, dass es zwei Funktionen Δ_1 und Δ_2 von $U \subseteq \mathbb{C}$ gibt, die in z_0 stetig sind, sodass für Δ sowie E wie gerade definiert gilt:

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\Delta(z) + (\bar{z} - \bar{z}_0)E(z),$$

und durch die Definitionen von Δ und E und die Stetigkeit von Δ_1, Δ_2 sind Δ und E beide stetig. Die Definition der Holomorphie ist also genau dann erfüllt, wenn $E(z_0) = 0$, da dann

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\left(\Delta(z) + \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0}E(z)\right).$$

Da $E(z_0) = 0$ und

$$\left|\frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0}\right| = 1,$$

ist die Funktion

$$\Delta(z) + \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0}E(z)$$

stetig in z_0. Also erfüllt f die Definition der Holomorphie in z_0. Für die Umkehrung, dass falls f holomorph in z_0 ist, es ein $\Delta : U \to \mathbb{C}$ gibt, das in z_0 stetig ist, sodass

$$f(z) = f(z_0) + \Delta(z)(z - z_0),$$

können wir $E(z) \equiv 0$ nehmen und f erfüllt (1.1). □

Definition 1.9. Den Differentialoperator

$$\partial_{\bar{z}} := \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$$

nennt man Cauchy-Riemann-Operator.

Eine holomorphe Funktion ist also eine $\mathbb{R}^2$-differenzierbare Funktion, die *zusätzlich* die Cauchy-Riemann-Gleichung erfüllt, nämlich

$$\partial_{\bar{z}} u = 0.$$

Bemerkung: Der Laplace-Operator schreibt sich auch

$$\Delta = 4\partial_z\partial_{\bar{z}}.$$

Wenn wir wieder $f = g + ih$ schreiben, ist die Cauchy-Riemann-Gleichung äquivalent zu den Gleichungen

$$g_x = h_y, \quad g_y = -h_x.$$

Proposition 1.10. *Es sei $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph (G sei ein Gebiet), sodass $f' \equiv 0$ auf G. Dann ist f konstant.*

Proof. Wir haben also $f_z \equiv 0$ sowie $f_{\bar{z}} \equiv 0$, also sind auch $f_x = f_y = 0$. Dementsprechend ist f in beide Richtungen konstant, also konstant auf G. □

2. Gleichmässige Konvergenz und Potenzreihen

Die folgende Proposition kennen Sie schon aus der Analysis 1.

Proposition 2.1. *Die geometrische Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k, \quad z \in \mathbb{C}$$

konvergiert genau dann, wenn $|z| < 1$. In diesem Fall ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}.$$

Definition 2.2. Eine Folge Funktionen $f_k : U \to \mathbb{C}$ auf einem Gebiet $U \subset \mathbb{C}$ konvergiert *gleichmäßig* gegen die Funktion f auf U genau dann, wenn es für $\varepsilon > 0$ $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $\forall k \geq N$ und $\forall z \in U$ gilt:

$$|f_k(z) - f(z)| < \epsilon.$$

Wir nennen die Folge *kompakt konvergent* genau dann, wenn die Folge für jedes kompakte $K \subset U$ gleichmäßig auf K konvergiert.

Wir wissen aus Analysis 1:

Proposition 2.3. *Der Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten (oder kompakt konvergenten) Folge stetiger Funktionen ist stetig.*

Wir haben auch eine Proposition über die Konvergenz der Ableitungen:

Proposition 2.4. *Es sei $\{f_k\}$ eine Folge holomorpher Funktionen, die auf einem Gebiet $U \subset \mathbb{C}$ gegen eine Funktion f konvergieren. Es seien die Ableitungen f_k' stetig und gegen eine Funktion g kompakt konvergent. Dann ist f holomorph und $f' = g$.*

Proof. Wegen der kompakten Konvergenz kann man für $z_0 \in U$ folgende Grenzwerte austauschen:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \lim_{k \to \infty} \frac{f_k(z) - f_k(z_0)}{z - z_0} = \lim_{k \to \infty} \lim_{z \to z_0} \frac{f_k(z) - f_k(z_0)}{z - z_0} = g(z_0).$$

Ferner ist g auf U stetig, da sie der Grenzwert stetiger kompakt konvergenter Funktionen ist. Also ist $f' = g$ und f auf U holomorph. □

Definition 2.5. Eine Funktionenreihe $\sum_{k \geq 0} f_k$ auf $M \subset \mathbb{C}$ heißt absolut konvergent auf M, wenn

$$\sum_{k \geq 0} |f_k|$$

auf M gleichmäßig konvergiert.

Die folgende Proposition ist eine Wiederholung aus der Analysis I.

Proposition 2.6 (Konvergenzkriterien)**.** *Die Reihe $\sum f_k$ ist absolut gleichmäßig konvergent auf M:*

(1) *wenn es $\forall \varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $\forall n, m \geq N$ und $\forall z \in M$ gilt:*

$$\sum_{n}^{m} |f_k(z)| < \varepsilon.$$

Dieses nennt man das Cauchy-Kriterium.

(2) *Ist* $\sum a_k$ *eine konvergente Reihe mit* $a_k \geq 0\ \forall k$ *und es gilt für fast alle* k *und* $\forall z \in M$

$$|f_k(z)| \leq a_k,$$

so ist $\sum f_k$ *absolut gleichmäßig konvergent auf* M. *Dieses nennt man das* Dominantenkriterium.

Bemerkung: Fast alle heißt hier bis auf eine endliche Teilmenge.

Definition 2.7. Die Einheitskreisscheibe ist

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Für $r > 0$ wir verwenden

$$r\mathcal{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}.$$

Definition 2.8. Eine *Potenzreihe* ist eine Reihe der Form

$$\sum a_k (z - z_0)^k.$$

Proposition 2.9. *Es sei* $z_1 \neq 0$ *und* $M \geq 0$ *sodass gilt:*

$$|a_k z_1^k| \leq M, \quad \forall k.$$

Dann konvergiert die Reihe

$$\sum a_k z^k$$

absolut kompakt in der Kreisscheibe $|z_1|\mathcal{D}$.

Proposition 2.10. *Für jede Potenzreihe* $P(z) = \sum a_k z^k$ *gibt es ein* $0 \leq r \leq \infty$, *sodass* $P(z)$ *absolut und kompakt konvergent auf* $r\mathcal{D}$ *ist und für* $|z| > r$ *divergiert. Dieses* r *nennt man Konvergenzradius. Es gilt:*

$$r = \frac{1}{\limsup |a_k|^{1/k}}.$$

Satz 2.11. *Eine Potenzreihe*

$$P(z) = \sum a_k z^k$$

ist in ihrem Konvergenzgebiet (d.h. der Kreisscheibe mit Radius gleich dem Konvergenzradius) holomorph. Ihre Ableitung ist

$$P'(z) = \sum_1 k a_k z^{k-1},$$

und der Konvergenzradius von P' *stimmt mit dem von* P *überein.*

Proof. Die Funktionen

$$f_n(z) := \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

sind jeweils ganz und stetig. Die Ableitungen

$$f_n'(z) = \sum_1^n k a_k z^{k-1}$$

sind auch ganz und stetig. In ihrem Konvergenzgebiet konvergieren die Funktionen f_n kompakt gegen $P(z)$. Es folgt aus der Analysis I, dass der Konvergenzradius von

$$\sum k a_k z^{k-1}$$

mit dem von P übereinstimmt. Es sei also

$$g(z) := \sum k a_k z^{k-1}.$$

Somit ist die Folge f_n' auf kompakten Teilmengen des Konvergenzgebietes gleichmäßig gegen g konvergent. Es folgt aus Proposition 2.4, dass $g = P'$, also ist g die Ableitungsfunktion von P und P ist auf dem Konvergenzgebiet holomorph. □

Satz 2.12 (Identitätssatz)**.** *Es sei $P(z) = \sum a_j z^j$ eine konvergente Potenzreihe. Dann ist*

$$P^{(k)}(z) = \sum_{j=k}^{\infty} j(j-1)\dots(j-k+1)a_j z^{j-k},$$

$$a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}.$$

Falls es eine Umgebung von 0 gibt, in der $P \equiv 0$, dann ist $a_k = 0\ \forall k$. Falls $Q(z) = \sum b_k z^k$ auch in einer Umgebung von 0 konvergiert und in dieser Umgebung $P = Q$ gilt, dann ist $a_k = b_k\ \forall k$.

Proof. Wir können den Satz 2.11 wieder auf P' verwenden, mit z.B. $\widetilde{a_k} := (k+1)a_{k+1}$. Dann ist

$$P'(z) = \sum_0 \widetilde{a_k} z^k \implies P''(z) = \sum_1 \widetilde{a_k} k z^{k-1} = \sum_2 k(k-1)a_k z^{k-2},$$

und P'' dasselbe Konvergenzgebiet besitzt. Wenn man dieses k mal macht hat man die Formel für die k^{te} Ableitungsfunktion für P. Die Formel für a_k folgt, wenn man $z = 0$ in der Formel für $P^{(k)}$ setzt. Ist $P \equiv 0$ in einer Umgebung U von 0, dann ist $a_0 = 0$. Da P auch in dieser Umgebung konstant ist, ist $P' \equiv 0$ in dieser Umgebung. Dasselbe gilt also für P'' und $P^{(k)}$ für jede k. Also ist im Punkt 0

$$P^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k \geq 0,$$

und laut der Formel für a_k ist $a_k = 0\ \forall k$.
Falls Q auch konvergiert in einer Umgebung von 0, in der $P \equiv Q$, dann da

$$|\sum_0^n (b_k - a_k)z^k| \leq \sum_0^n (|b_k| + |a_k|)|z|^k = \sum_0^n |b_k||z|^k + \sum_0^n |a_k||z|^k,$$

und beide konvergieren in dieser Umgebung, ist also die Potenzreihe

$$R(z) = \sum (b_k - a_k)z^k$$

absolut kompakt konvergent in dieser Umgebung U und

$$R(z) = Q(z) - P(z) \equiv 0 \forall z \in U.$$

Wir haben gezeigt, dass die Koeffizienten dann jeweils verschwinden,

$$b_k - a_k = 0 \forall k \implies b_k = a_k \forall k.$$

□

Der Sagt, dass konvergente Potenzreihen eine eindeutige Darstellung haben, dementsprechend nennen wir den Satz der Identitätssatz, weil er uns sagt, dass eine konvergente Potenzreihe eine eindeutige "Identität" hat. Der Mittepunkt, 0 ist unwichtig. Wir können das gleiche für Potenzreihen um einem anderen Punkt, z_0,

$$P(z) = \sum a_k (z - z_0)^k.$$

3. Exponentielle und Trigonometrische Funktionen

Es gibt eine wichtige Funktion

$$e^z := \sum_0 \frac{z^k}{k!}.$$

Berechnen Sie den Konvergenzradius. Diese Funktion ist dementsprechend ganz. Ihre Ableitung ist... sich selbst! Laut der Definition kann man zeigen, dass

(1) $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$
(2) $e^0 = 1$

(3) Es sei $w \in \mathbb{C}$ fest. Dann ist für $f(z) = e^{z+w}$ und $g(z) = e^{-z}$ laut der Produktregel

$$(fg)'(z) = e^{z+w}e^{-z} - e^{z+w}e^{-z} = 0.$$

Dementsprechend ist fg konstant. Also gilt

$$e^{z+w}e^{-z} = C \in \mathbb{C}$$

ist eine konstante Funktion. Für $z = 0$ ist $C = e^w$, also gilt für jede $z \in \mathbb{C}$,

$$e^{z+w}e^{-z} = e^w. \tag{3.1}$$

Da w zufällig aus $\mathbb{C}$ war, gilt dieses für jede $w \in \mathbb{C}$. Dann, für $w = 0$ gilt (laut (2))

$$e^z e^{-z} = e^{w=0} = e^0 = 1.$$

Also wenn wir $e^{z+w}e^{-z} = e^w$ mit e^z multiplizieren und (3.1) verwenden haben wir

$$e^{z+w}e^{-z}e^z = e^{z+w} * 1 = e^{z+w} = e^z e^w.$$

(4) Aus (1) und (3) haben wir

$$|e^z| = \sqrt{(e^z)(e^{\bar{z}})} = \sqrt{e^{z+\bar{z}}} = e^{(z+\bar{z})/2} = e^{\Re(z)}.$$

Es folgt, dass der Bild $\{e^z : \Re(z) = c\}$ auf einer Kreisscheibe liegt. Wie schön. Insbesondere

$$\{e^z : \Re(z) = 0\} \subset \partial\mathcal{D}.$$

Das Verhältnis zwischen z und der Lage des Punkts e^z auf der Kreisscheibe mit dem Radius $e^{\Re(z)}$ werden wir mithilfe der folgenden wichtigen Funktionen betrachten.

Definition 3.1. Die trigonometrische-Funktionen

$$\cos(z) := \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}).$$

$$\sin(z) := \frac{1}{2}(e^{iz} - e^{-iz}).$$

Die hyperbolische-trigonometrische Funktionen

$$\cosh(z) := \frac{1}{2}(e^{z} + e^{-z}).$$

$$\sinh(z) := \frac{1}{2}(e^{z} - e^{-z}).$$

Diese Funktionen haben folgende Eigenschaften, die aus der Potenzreihe für e^z sowie die Definitionen folgen.

(1) $\sin'(z) = \cos(z)$, $\cos'(z) = -\sin(z)$, $\sinh(z) = \cosh(z)$, $\cosh'(z) = \sinh(z)$.
(2) $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$, $\cos(z+w) = cos z \cos w - \sin z \sin w$. $\sinh(z+w) = \sinh z \cosh w + \cosh z \sinh w$. $\cosh(z+w) = \cosh z \cosh w + \sinh z \sinh w$.
(3) Für jede diese Funktion gilt $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$.
(4) Mithilfe der Potenzreihe e^z kann man ausrechnen

$$\cos(z) = \sum (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin(z) = \sum (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

$$\cosh(z) = \sum \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin(z) = \sum \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

(5) $e^{iz} = \cos z + i \sin z$. Für $z = y \in \mathbb{R}$ hat man also

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y.$$

Dementsprechend gilt:

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

(6) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.
(7) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$.

Zu jedem Punkt
$$z = x + iy \in \mathcal{D},$$
gilt
$$x^2 + y^2 = 1.$$
Für passende
$$\theta = \arctan \frac{y}{x}$$
gilt
$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta = x + iy.$$
Dementsprechend ist $e^z : i\mathbb{R} \to \partial\mathcal{D}$ auch surjektiv. Wir können damit π definieren.

Definition 3.2. π ist die kleinste reelle Zahl, sodass
$$e^{2\pi i} = 1.$$

Laut dieser Eigenschaften der Exponentielle-Funktion haben wir folgende.

(1) e^z ist periodisch mit Period $2\pi i$.
(2) $t \mapsto e^t$ ist von $\mathbb{R} \to (0, \infty)$ bijektiv.
(3) $t \mapsto e^{it}$ ist von $[0, 2\pi) \to \partial\mathcal{D}$ bijektiv.

Daraus folgt es, dass für jede $z \in \mathbb{C}$ es $r, \theta \in \mathbb{R}$ geben, sodass $z = re^{i\theta}$. Diese Darstellung einer komplen Zahl nennt man *Polar-Darstellung,* und man nennt (r, θ) *Polar-Koordinaten.*
Folgende Proposition kennt man aus der Analysis I; zu zeigen ist aber, dass es keine Nullstellen gibt, der Form $z = x + iy$, wobei $y \neq 0$.

Proposition 3.3. *Die Nullstellen der* sin *sind die reelle Zahlen $k\pi$ wobei $k \in \mathbb{Z}$, und die Nullstellen der* cos *sind die reelle Zahlen $\frac{\pi}{2} + k\pi$, wobei $k \in \mathbb{Z}$.*

Proof. Wir betrachten den sin Fall. Falls $\sin(z) = 0$, laut der Definition gilt:
$$e^{iz} - e^{-iz} = 0 \implies e^{2iz} - 1 = 0 \implies e^{2iz} = 1 \implies 2iz = 2ik\pi$$
wobei $k \in \mathbb{Z}$. Der Fall cos ist ähnlich. □

4. Grundlagen der Integration

Eine die wichtigste Technik der Funktionentheorie ist die Integration. Zuerst benötigen wir einige Ergebnisse aus der Analysis I/II.

Definition 4.1. Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ heißt *stuckweise stetig (ss)* falls es $a = t_0 < \ldots < t_n = b$ geben, sodass f eingeschränkt auf (t_i, t_{i+1}) ist für $i = 0, \ldots, n-1$ stetig, und f eine stetige Fortsetzung auf den Randpunkte t_i und t_{i+1} hat. Die Funktion heißt *stuckweise differenzierbar* falls f' existiert bis auf $\{t_i\}_{i=0}^n$ und f' kann also ss Funktion fortgesetzt werden.

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ messbar; das gilt genau dann, wenn es $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ geben, die messbar sind, sodass
$$f = g + ih.$$
Dann ist
$$I(f) := \int_a^b f(t)dt := \int_a^b g(t)dt + i\int_a^b h(t)dt.$$
Es gelten:

(1) Die Funktional I ist linear
(2) $I(\bar{f}) = \overline{I(f)}$
(3) $I(\Re f) = \Re I(f)$
(4) $I(\Im f) = \Im I(f)$

Lemma 4.2. *Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ messbar. Dann gilt*
$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt.$$

Proof. Da $\int_a^b f(t)dt = \eta \in \mathbb{C}$, können wir η als Polar-Darstellung schreiben:

$$\eta = re^{i\theta}, \quad r, \theta \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt:

$$e^{-i\theta}\eta = r \geq 0.$$

Da $|e^{-i\theta}| = 1$, gilt

$$|e^{-i\theta}\eta| = |e^{-i\theta}||\eta| = |\eta|,$$

und ferner gilt

$$|\eta| = |e^{-i\theta}I(f)| = \Re(e^{-i\theta}I(f)) = \Re\int_a^b e^{-i\theta}f(t)dt = \int_a^b \Re(e^{-i\theta}f(t))dt$$

$$\leq \int_a^b |e^{-i\theta}f(t)|dt = \int_a^b |f(t)|dt.$$

□

Alles was wir von Integration auf $\mathbb{R}$ schon wissen gelten genau so auf $\mathbb{C}$. Insbesondere haben wir

Proposition 4.3. *Es sei $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$. Dann gilt*

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a).$$

Es sei f stuckweise stetig auf $[a,b]$ und sei $h : [c,d] \to [a,b]$ eine stetige, monoton wächsend und stuckweise differenzierbare bijektion. Dann

$$\int_a^b f(s)ds = \int_c^d f(h(t))h'(t)dt.$$

Jetzt können wir Integration auf $\mathbb{C}$ definieren.

Definition 4.4. Es sei $M \subset \mathbb{C}$. Ein Integrationsweg in M ist eine stetige und stuckweise differenzierbare Abbildung $\gamma : [a,b] \to M$. Das Interval $[a,b]$ ist das Parameter-Interval und der Anfangspunkt γ ist $\gamma(a)$ und der Endpunkt γ ist $\gamma(b)$. Der Bild $\gamma[a,b]$ ist der Spur des Wegs γs und würde mit Sp γ gezeichnet. Die Länge eines Integrationswegs ist

$$L(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)|dt.$$

Es sei $f : M \to \mathbb{C}$ stetig auf $M \subset \mathbb{C}$, und $\gamma : [a,b] \to M$ ein Integrationsweg. Dann ist das Integral von f auf dem (Integrations)Weg γ,

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Wir werden oft Integrationsweg mit Weg abkürzen. Hier sind einige Beispiele:

(1) Es seien $a < b \in \mathbb{C} \cap \mathbb{R}$ und $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\gamma(t) = a + t(b-a).$$

Dann ist

$$\int_{[a,b]} f(z)dz = \int_0^1 f(a + t(b-a))(b-a)dt = \int_a^b f(s)ds,$$

wobei wir $s := a + t(b-a)$ zusammen mit Koordinaten-Wechsel für reelle Variable verwendet haben.

(2) Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r >$, und
$$\gamma(t) := z_0 + re^{it} : [-\pi, \pi] \to z_0 + r\mathcal{D}.$$
Dann ist
$$L(\gamma) = \int_{-\pi}^{\pi} |\gamma'(t)| dt = \int_{-\pi}^{\pi} |ire^{it}| dt = 2\pi r.$$
Also glücklicherweise stimmt unsere Definition π mit der üblichen geometrischen Definition π.

(3) Besonders wichtig ist
$$\int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}} = 2\pi i.$$

Jetzt wollen wir zeigen, dass Integration auf $\mathbb{C}$ eindeut definiert ist.

Definition 4.5. Eine Parameter-Wechsel ist eine Funktion $h : [c, d] \to [a, b]$, die eine stetige, stuckweise differenzierbare bijektion ist, sodass es eine $\delta > 0$ gibt, sodass gilt
$$h'(t) > \delta \forall t \text{ sodass } h' \text{ definiert ist.}$$

Für einen Integrationsweg γ, dann ist $\gamma \circ h : [c, d] \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg mit demselben Spur. Wir nennen $\gamma \circ h$ eine Reparametrizierung von γ. Es sei f auf Sp γ stetig. Dann gilt
$$\int_\gamma f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt = \int_c^d f(\gamma(h(s))(\gamma \circ h)'(s) ds = \int_{\gamma \circ h} f(z) dz.$$
Wir werden Integrationswege, die Reparametrizierungen von einander sind, identifizieren.

Proposition 4.6. *Es sei f stetig auf Sp γ. Dann gilt:*
$$\left| \int_\gamma f(z) dz \right| \le L(\gamma) \max_{z \in \operatorname{Spur} \gamma} |f(z)|.$$

Proof. Da $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig ist, ist $\gamma([a, b])$ kompakt. (Warum?) Da f auch stetig auf $\operatorname{Spur} \gamma$ ist, dann gibt es $M \in \mathbb{R}$ sodass gilt
$$|f(z)| \le M \forall z \in \operatorname{Spur} \gamma.$$
Es folgt aus der letzten Proposition, dass
$$\left| \int_\gamma f(z) dz \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt \right| \le \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)| dt$$
$$\le \int_a^b M|\gamma'(t)| dt = ML(\gamma).$$
□

Proposition 4.7. *Es seien $\{f_k\}$ stetige Funktionen, die gleichmä ßig gegen eine Funktion f auf* $\operatorname{Spur} \gamma$ *konvergieren. Dann ist f stetig und*
$$\int_\gamma f(z) dz = \lim_{k \to \infty} f_k(z) dz.$$

Proof. Wir wissen schon, dass f stetig ist. Wir können den DomKon Satz von Lebesgue verwenden, da wegen der gleichmä ßig Konvergenz, gibt es $N \in \mathbb{N}$ sodass für jede $k \ge N$ und für jede $z \in \operatorname{Spur} \gamma$ gilt:
$$|f_k(z) - f(z)| < 1.$$
Da f auf $\operatorname{Spur} \gamma$ stetig ist, und $\operatorname{Spur} \gamma$ kompakt ist, gibt es $M \in \mathbb{R}$ sodass gilt
$$|f(z)| < M \forall z \in \operatorname{Spur} \gamma.$$
Es sei
$$M_k := \max\{|f_k(z)| : z \in \operatorname{Spur} \gamma\}.$$

(Warum ist es max und nicht nur sup?)

$$G := \max\{M_1, M_2, \dots, M_{N-1}, M + 1\}.$$

Dann gilt für jede $k \; in \mathbb{N}$

$$|f_k(z)| \le G \forall z \in \operatorname{Spur}\gamma.$$

Die Proposition folgt also aus dem DomKon Satz von Lebesgue. □

Man könnte auch direkt abschätzen :

$$\left|\int_\gamma f(z)dz - \int_\gamma f_k(z)dz\right| = \left|\int_\gamma (f(z) - f_k(z))dz\right|$$
$$\le L(\gamma) \max_{z \in \operatorname{Spur}\gamma} |f(z) - f_k(z)| \to 0 \text{ als } k \to \infty,$$

wobei diese folgt aus der Definition der gleichmäßig Konvergenz.
Wir können auch die Integrationssätze aus der Lebesgue-Integrationstheorie verwenden und folgende beweisen.

Proposition 4.8. *Es sei γ ein Integrationsweg in $\mathbb{C}$, $M \subset \mathbb{R}^n$ und $f : \operatorname{Spur}\gamma \times M \to \mathbb{C}$ sei stetig. Dann es gelten:*

1. *Die Funktion*
$$F(x) := \int_\gamma f(z, x)dz$$
ist auf M stetig.
2. *Es sei M offen und die partielle Ableitung von f bzgl. x_k stetig auf $\operatorname{Spur}\gamma \times M$, dann ist F $\mathcal{C}^1$ bzgl. x_k und es gilt*
$$\frac{\partial F}{\partial x_k}(x) = \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial x_k}(z, x)dz.$$
3. *Es sei $M \subset \mathbb{C}$ offen und $\forall z \in \operatorname{Spur}\gamma$ f sei holomorph bzgl. $w \in M$ und $f_w(z, w)$ sei stetig auf $\operatorname{Spur}\gamma \times M$, dann ist F holomorph in w und*
$$F'(w) = \int_\gamma f_w(z, w)dz.$$

Es seien α und β zwei Integrationswege und f sei auf $\operatorname{Spur}\alpha \times \operatorname{Spur}\beta$ stetig. Dann es gilt

$$\int_\alpha \left(\int_\beta f(z, w)dw\right) dz = \int_\beta \left(\int_\alpha f(z, w)dz\right) dw.$$

Es seien $\{a_{j,k}\}$ komplexe Zahlen. Falls es $M \in \mathbb{R}$ gibt, sodass gilt

$$\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} |a_{j,k}| \le M \forall m, n \in \mathbb{N},$$

dann sind die Reihen $\sum_j \sum_k a_{j,k}$ sowie $\sum_k \sum_j a_{j,k}$ absolut konvergent und dieselbe Summe haben.

5. Stammfunktionen und Integration

Es gibt eine interessante Verbindung zwischen den folgenden drei Fragen bzgl. eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$:

1. Gibt es eine Stammfunktion F sodass gilt $F' = f$?
2. Was ist das Integral von f auf abgeschlossenen Integrationswegen?
3. Ist f holomorph auf G?

Wir werden zuerst den Zusammenhang zwischen (1) und (2) untersuchen.

Definition 5.1. Es sei $f : G \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, die auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ definiert ist. Eine Funktion $F : G \to \mathbb{C}$ heißt eine Stammfunktion (für f) falls F holomorph ist und es gilt: $F' = f$.

Zum Beispiel für eine Potenzreihe auf seinem Konvergenzgebiet

$$f(z) = \sum a_n(z - z_0^n), \quad G = \text{Konvergenzgebiet von } f,$$

ist

$$F(z) := \sum \frac{a_n}{n+1}(z - z_0)^{n+1}$$

eine Stammfunktion für f. Diese Funktion hat dasselbe Konvergenzgebiet vie f (warum? zeigen Sie!). Sie können also mithilfe der Potenzreihen für e^z, $\cos z$, $\sin z$ Stammfunktionen für diese Funktionen berechnen und sie sind nichts anders als erwartet.
Es sei F eine Stammfunktion für f, dann für ein Integrationsweg $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, da $(f \circ \gamma)\gamma'$ stetig ist, gilt (Kettenregel, Fundamentalsatz der Analysis)

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t)dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Ist also γ abgeschlossen, gilt

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Proposition 5.2. *Es sei F eine Stammfunktion für $f : G \to \mathbb{C}$. Dann für jeden Integrationsweg $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ mit* $\text{Spur}(\gamma) \subset G$ *gilt*

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(b)).$$

Falls γ abgeschlossen ist, dann ist

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

5.1. **Vergleich mit $\mathbb{R}$.** Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist die Funktion

$$F(t) := \int_a^t f(s)ds$$

eine Stammfunktion für f auf (a, b), laut dem Fundamentalsatz der Analysis. Gibt es also immer eine Stammfunktion für jede stetige Funktion, die auf einem Gebiet in $\mathbb{R}$ definiert ist. Diese Aussage gilt *nicht* für jede stetige Funktion $G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Zum Beispiel (diese Funktion ist immer gut im Kopf zu behalten)

$$f(z) := \frac{1}{z} : G = \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$$

ist auf G stetig. Wir berechnen für den Integrationsweg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{it}$,

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\gamma(t)}\gamma'(t)dt = \int_0^{2\pi} e^{-it}ie^{it}dt = 2\pi i.$$

Die Proposition sagt, dass wenn $f(z)$ eine Stammfunktion hätte, dann müsste das Integral verschwinden, da $\text{Spur}(\gamma) \subset G$.

Proposition 5.3. *Es sei f eine stetige Funktion auf einem zusammenhängenden Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ sodass gilt*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0,$$

für jeden abgeschlossen Integrationsweg γ mit $\text{Spur}(\gamma) \subset G$. *Dann gibt es eine Stammfunktion F für f.*

Proof. Es sei $a \in G$. Für $z \in G$, sei γ_z ein Integrationsweg von a nach z in G. Damit γ_z existiert braucht man, dass G zusammenhängt. Sei

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(w)dw.$$

Da G ein Gebiet ist, ist G angenommen offen. Diese Definition hängt von a ab aber sie hängt *nicht* von der Wahl γ_z ab. Sei σ_z ein Integrationsweg zwischen a und z in G. Wir werden oft annehmen, dass $a = 0$ und $b = 1$, da wir einfach ein Parameterwechsel verwenden könnten, und das Integral sowie Integrationsweg gleich bleiben. Dann ist

$$\gamma(t) := \gamma_z(t),\, t \in [0,1], \quad \sigma_z(2-t),\, t \in [1,2]$$

ein abgeschlossener Integrationsweg in G wobei wir merken, dass $\sigma_z(2-t) : [1,2] \to G$ ist genau $-\sigma_z(t) = \sigma(1-t) : [0,1] \to G$ d.h. σ_z einfach rückwärts. Dementsprechend ist

$$\int_\gamma f(w)dw = 0 = \int_{\gamma_z} f(w)dw - \int_{\sigma_z} f(w)dw \implies \int_{\gamma_z} f(w)dw = \int_{\sigma_z} f(w)dw.$$

Noch zu bemerken ist, da

$$\int_0^1 f(\sigma(1-t))dt = -\int_0^1 f(\sigma(s))ds, \quad s = 1-t.$$

Jetzt werden wir zeigen, dass so definiert ist F holomorph und die Ableitungsfunktion f ist. Für $z_0 \in G$, es gibt $\epsilon > 0$ sodass für jede $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < \epsilon$ ist $z \in G$ und damit ist der Weg $[z, z_0] \subset G$. Der Integrationsweg

$$\gamma(t) = \gamma_{z_0}(t),\, t \in [-1,0], \quad (1-t)z_0 + tz,\, t \in [0,1], \quad \sigma(t) = \gamma_z(3-t),\, t \in [1,2],$$

ist ein abgeschlossener Integrationsweg in G also gilt

$$\int_{\gamma_{z_0}} f(w)dw + \int_{[z,z_0]} f(w)dw - \int_{\gamma_z} f(w)dw = 0.$$

Eine kleine Bemerkung ist, dass so definiert kann man $\gamma_z(2-t)$ mit $-\gamma_z$ identifizieren, da der Spur $\gamma_z(2-t)$ ist genau der Spur γ_z nur Rückwärts gelaufen. Wir haben also

$$F(z) - F(z_0) = \int_{\gamma_z} f(w)dw - \int_{\gamma_{z_0}} f(w)dw = -\int_{[z_0,z]} f(w)dw =$$

$$F(z) - F(z_0) = \int_0^1 f(z_0 + t(z-z_0))(z-z_0)dt = (z-z_0)\int_0^1 f(z_0 + t(z-z_0))dt.$$

Dementsprechend ist

$$\begin{aligned} \lim_{z\to z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{z\to z_0} \int_0^1 f(z_0 + t(z-z_0))dt \\ &= \int_0^1 f(z_0)dt = f(z_0). \end{aligned}$$

□

Eine Eigenschaft fehlt für den Gebiet $\mathbb{C} \setminus \{0\}$: Konvexität.

> *In der Analysis ist Konvexität eine sehr wichtige Eigenschaft, die Konzequenzen für die Lösungen partielle Differentialgleichungen hat!!*

Die Existenz einer Stammfunktion ist eine DG grades eins ($F' = f$), die in der Regel nicht homogen ist (d.h. $f \neq 0$).
Eine etwas schwachere geometrische Eigenschaft als Konvexität ist sternformig.

Definition 5.4. Eine Gebiet G heißt *sternformig* falls es $a \in G$ gibt, sodass für jede $z \in G$ der gerade Weg $[a, z]$ in G liegt.

Es ist klar, dass jede konvexe Gebiet sternformig ist!

Proposition 5.5. *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein sternformiges Gebiet bzgl. $a \in G$ und sei $f : G \to \mathbb{C}$ stetig. Falls es gilt für jeden abgeschlossenen Dreieck $T \subset G$ dessen Ecken in G sind,*

$$\int_{\partial T} f(w)dw = 0,$$

dann hat f eine Stammfunktion.

Proof. Es sei
$$F(z) := \int_{[a,z]} f(w)dw.$$
Wir werden zeigen, dass F eine Stammfunktion für f ist. Sei $z_0 \in G$ und z sodass $[z_0, z] \subset G$, dann ist T der Dreieck mit Ecken a, z, und z_0 innerhalb von G (zeichnen Sie!) und gilt also
$$0 = \int_T f(w)dw = \int_{[a,z]} f(w)dw + \int_{[z,z_0]} f(w)dw + \int_{[z_0,z]} f(w)dw$$
$$= \int_{[a,z]} f(w)dw - \int_{[z_0,z]} f(w)dw - \int_{[z,z_0]} f(w)dw = F(z) - F(z_0) - \int_{[z_0,z]} f(w)dw$$
$$\implies F(z) - F(z_0) = \int_{[z_0,z]} f(w)dw.$$
Wie im letzten Beweis ist also
$$F(z) - F(z_0) = \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))(z - z_0)dt = (z - z_0)\int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))dt.$$
Dementsprechend ist
$$\lim_{z\to z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))dt$$
$$= \int_0^1 f(z_0)dt = f(z_0).$$
$\square$

5.2. **Der Fundamentalsatz der Funktionentheorie.** Um den Fundamentalsatz zu beweisen werden wir folgenden benötigen.

Lemma 5.6 (Goursat)**.** *Es sei f holomorph auf einer Umgebung $G \supset T$ wobei $T \subset \mathbb{C}$ ein Dreieck ist. Dann gilt*
$$\int_{\partial T} f(z)dz = 0.$$

Proof. Man kann den Dreieck in vier kleinere Dreiecke $\{T_1^k\}_{k=1}^4$ aufteilen, in dem wir auf jedem Rand dem Mittelpunkten verbinden. Dann läufen die Integrationswege sodass, die mitteleren gegenseitig vernichten, also gilt
$$\int_{\partial T} f(z)dz = \sum_{k=1}^4 \int_{\partial T_1^k} f(z)dz \le 4 \max_{1\le k\le 4} \left| \int_{\partial T_1^k} f(z)dz \right|.$$
Es sei T_1 der Dreieck, dessen Integral am Rand das Maximum erreicht. Dann gilt
$$\left| \int_{\partial T} f(z)dz \right| \le 4 \left| \int_{\partial T_1} f(z)dz \right|.$$
Wir machen genauso mit T_1, damit es T_2 gibt und immer weiter so. Dann ist $T \subset T_1 \supset T_2 \ldots T_k \supset T_{k+1} \ldots$, und es gilt
$$\left| \int_{\partial T} f(z)dz \right| \le 4^k \left| \int_{\partial T_k} f(z)dz \right|. \tag{5.1}$$
Laut Euclidische Geometrie gilt:
$$|\partial T_1| = \frac{1}{2}|\partial T|, \quad |\partial T_k| = 2^{-k}|\partial T|,$$
wobei $|\partial T|$ die Länge des Rands bedeutet. Da der Durchmesser eines Dreiecks gleich die Länge der längsten Seite ist, gilt auch
$$d(T_k) = 2^{-k}d(T).$$

Jede T_k ist kompakt, also folgt es aus der Vollständigkeit $\mathbb{C}$, dass

$$\cap_{k\geq 1} T_k \neq \emptyset,$$

und da dieser Durchschnitt in jedem T_k liegt, ist der Durchmesser kleiner als $2^{-k}d(T)$ für jede $k \in \mathbb{N}$. Da dieses gegen 0 konvergiert ist dementsprechend

$$\cap_{k\geq 1} T_k = \{z_0\}.$$

(Wenn es ein anderen Punk gäbe, muss der Abstand zwischen den beiden positiv sein und wäre der Durchmesser dann mindestens so gröss und damit nicht mehr 0). Angenommen war, dass f holomorph ist, also gibt es eine stetige Funktion A auf T sodass

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + (z - z_0)A(z),$$

wobei $A(z_0) = 0$. Die Funktion

$$g(z) := f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0)$$

hat eine Stammfunktion, nämlich

$$G(z) := zf(z_0) + \frac{(z - z_0)^2}{2} f'(z_0).$$

Dementsprechend ist

$$\int_{\partial T} g(z)dz = 0.$$

Dann haben wir

$$\left|\int_{\partial T_k} f(z)dz\right| = \left|\int_{\partial T_k} (z - z_0)A(z)dz\right| \leq |\partial T_k| \max_{z\in T_k} |(z - z_0)A(z)|$$

$$\leq |\partial T_k| d(T_k) \max_{z\in T_k} |A(z)|.$$

Wenn wir (5.1) zusammen mit dem Verhältniss der Umfassungen sowie Durchmesser verwenden, haben wir

$$\left|\int_{\partial T} f(z)dz\right| \leq 4^k 2^{-k}|\partial T| 2^{-k} d(T) \max_{z\in T_k} |A(z)| = |\partial T| d(T) \max_{z\in T_k} |A(z)|.$$

Da $T_k \to \{z_0\}$ als $k \to \infty$ und $A(z_0) = 0$ ist stetig in z_0, konvergiert die rechte Seite gegen 0 als $k \to \infty$ und dementsprechend ist

$$\int_{\partial T} f(z)dz = 0.$$

□

Satz 5.7 (Cauchy-Integralsatz)**.** *Es sei f eine holomorphe Funktion auf einem sternformigen Gebiet G. Dann hat f eine Stammfunktion und gilt*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0,$$

für jeden abgeschlossenen Integrationsweg γ in G.

Proof. Nach dem Goursat-Lemma verschwindet das Integral von f auf jedem Integrationsweg, der ein Dreieck ist. Dann nach der Proposition für sternformige Gebiete, hat f eine Stammfunktion. Laut noch einer Proposition verschwindet das Integral für jeden abgeschlossenen Integrationsweg in G. □

6. Das Cauchy-Integralformel

Wir werden sehen, dass die Werte einer holomorphen Funktion innerhalb eines Kreises durch den Werte auf dem Rand des Kreises bestimmt werden. Dieses können Sie beim Integrationsrechnung verwenden!

Lemma 6.1. *Es sei $T \subset \mathbb{C}$ ein Dreieck und es sei f holomorph auf einem Gebiet G das T enthält mit $T \subset\subset G$ auserhalb vielleicht einem Punkt z_0 in dem Inneren von T in dem f nur stetig ist. Dann ist*

$$\int_{\partial T} f(z)dz = 0.$$

Proof. (1) Es sei z_0 eine Ecke von T. Da f stetig ist, ist f auf der kompakten Menge T beschränkt, sodass es $M > 0$ gibt mit $|f(w)| \leq M$ for all $w \in T$. Es sei $\varepsilon > 0$. Wir teilen T in drei neuen Dreiecken, sodass z_0 in T_1 ist und $L(T_1) < \frac{\varepsilon}{M}$. Dann da in einer Umgebung von den anderen Dreiecken T_2 und T_3 die Funktion f holomorph ist, gilt

$$\int_{\partial T_i} f(z)dz = 0, \quad i = 1, 2.$$

Da

$$\int_{\partial T} f(z)dz = \int_{T_1} f(z)dz + \int_{T_2} f(z)dz + \int_{T_3} f(z)dz \implies \left|\int_{\partial T} f(z)dz\right| = \left|\int_{T_1} f(z)dz\right|$$

$$\leq L(T_1)M < \varepsilon.$$

Dieses gilt für jede $\varepsilon > 0$ also ist

$$\int_{\partial T} f(z)dz = 0,$$

falls z_0 eine Ecke ist.

(2) Es sei z_0 auf einer Seite von T. Dann teilen wir T in zwei Dreiecken, sodass z_0 eine Ecke für beide ist. Laut (1) gilt

$$\int_{\partial T_i} f(z)dz = 0, \quad i = 1, 2$$

$$\implies \int_T f(z)dz = \int_{T_1} f(z)dz + \int_{T_2} f(z)dz = 0.$$

(3) Im letzten Fall, ist z_0 in dem Inneren von T. Auch kein Problem. Dieses mal teilen wir T in zwei Dreiecken, sodass z_0 auf einer gemeinsamen Seite von T_1 und T_2 ist. Laut (2) ist

$$\int_{\partial T_i} f(z)dz = 0, \quad i = 1, 2$$

$$\implies \int_T f(z)dz = \int_{T_1} f(z)dz + \int_{T_2} f(z)dz = 0.$$

□

Aus dem Lemma fogt den

Korollar 6.2. *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein sternformiges Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion die auf $G \setminus \{z_0\}$ holomorph ist. Dann für jeden abgeschlossenen Integrationsweg γ in G gilt*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Proof. Es sei T ein Dreieck sodass $T \subset\subset G$. Dann falls $z_0 \in \overline{T}$ ist, laut dem Lemma ist

$$\int_{\partial T} f(z)dz = 0.$$

Falls $T \cap z_0 = \emptyset$, dann ist f holomorph auf einer Umgebung von T also nach dem Lemma von Goursat ist

$$\int_{\partial T} f(z)dz = 0.$$

Dementsprechend sind die Voraussetzungen der Proposition 5.5 erfüllt und die Proposition sagt, dass f eine Stammfunktion hat. Dann folgt die Aussage aus der Proposition 5.2. □

Satz 6.3 (Cauchy Integralformel)**.** *Es sei G ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und $z_0 \in G$. Es sei $D = D_r(z_0) \subset\subset G$. Dann für jede holomorphe Funktion f auf G,*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(w)}{w-z}dw, \quad \forall z \in D.$$

Proof. Da das Gebiet offen ist, gibt es $\varepsilon > 0$, sodass $\forall\ r \in (0, \varepsilon]\ D_r(z_0) \subset\subset G$. Es sei $z \in D$ und es sei $r \in (0, \varepsilon)$. Wir definieren

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & w \neq z \\ f'(z) & w = z \end{cases}$$

Die Funktion g ist holomorph auf $U := D_{(r+\varepsilon)/2}$ und ist auf jeden Fall stetig im Punkt z. Laut dem Korollar können wir den Cauchy-Integralsatz auf g verwenden also gilt

$$0 = \int_{\partial D} g(w)dw = \int_{\partial D} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}dw = \int_{\partial D} \frac{f(w)}{w-z}dw - \int_{\partial D} \frac{f(z)}{w-z}dw.$$

Man merkt, dass $f(z)$ *konstant* auf ∂D ist. Also ist

$$\int_{\partial D} \frac{f(w)}{w-z}dw = f(z)\int_{\partial D} \frac{dw}{w-z}.$$

Wir möchten das Integral

$$\int_{\partial D} \frac{dw}{w-z}$$

berechnen. Wir wissen das Ergebnis falls $z = z_0$ aber falls nicht..? Die Frage ist *wie ändert sich das Integral als z sich ändert?* Dementsprechend berechnen wir

$$\frac{\partial}{\partial z}\int_{\partial D} \frac{dw}{w-z} = \int_{\partial D} \frac{dw}{(w-z)^2}.$$

(Der Grund, warum wir die Ableitung (= ein Grenzwert) in dem Integral reinziehen können folgt aus dem Dominierten Konvergenzsatz von Lebesgue, da die Funktion $\frac{1}{w-z}$ auf ∂D gleichmäßig beschränkt ist!) Die Funktion

$$g(w) = \frac{1}{(w-z)^2}$$

hat eine Stammfunktion auf dem Gebiet $G = \mathbb{C} \setminus z$, nämlich

$$G(w) = \frac{1}{w-z}.$$

Da $\partial D \subset \mathbb{C} \setminus z$, ist also

$$\int_{\partial D} g(w)dw = 0 \implies \frac{\partial}{\partial z}\int_{\partial D} \frac{dw}{w-z} = 0.$$

Dann müss die Funktion

$$z \mapsto \int_{\partial D} \frac{dw}{w-z}$$

konstant auf D sein und dementsprechend ist

$$\int_{\partial D} \frac{dw}{w-z} = \int_{\partial D} \frac{dw}{w-z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{rie^{it}}{z_0 + re^{it} - z_0}dt = 2\pi i,$$

wobei wir den Integrationsweg $\gamma(t) = z_0 + re^{it} : [0, 2\pi] \to \partial D$ verwendet haben. Ist also

$$\int_{\partial D} \frac{f(w)}{w-z} dw = f(z) \int_{\partial D} \frac{dw}{w-z} = 2\pi i f(z) \implies f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

□

Das Formel können wir jetzt verwenden um irgendwas sehr interessantes zu beweisen . . .

Satz 6.4 (Supermegadifferenzierbarkeit). *Es sei G ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und f eine holomorphe Funktion auf G. Dann ist f' auch holomorph, sowie f'', und so weiter: f ist unendlich-mal komplex differenzierbar! Es gilt für jede $z_0 \in G$ und $r > 0$ so klein, dass $D = D_r(z_0) \subset\subset G$, für $z \in D$,*

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}} dw.$$

Dieses Formel nennt man auch das Cauchy-Integralformel.

Proof. Es sei $z_0 \in G$ und $r > 0$ so klein, dass $D = D_r(z_0) \subset\subset G$. Dann laut dem Integralformel ist für jede $z \in D$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Da das Integrand gleichmäßig auf ∂D beschränkt ist, können wir schon wieder

$$\partial_z f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \partial_z \frac{f(w)}{w-z} dw$$

betrachten. Auf der rechten Seite ist die Ableitung des Integrands

$$\partial_z \frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w)}{(w-z)^2},$$

also ist

$$\partial_z f(z) = f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw.$$

Das Integrand ist eine holomorphe Funktion für $z \in D$. Dann kann man nochmal betrachten

$$\partial_z f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \partial_z \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw$$
$$= \frac{2}{2\pi i} \int_{\partial D} \partial_z \frac{f(w)}{(w-z)^3} dw.$$

Dementsprechend ist f' auch holomorph auf D mit

$$f''(z) = \frac{2}{2\pi i} \int_{\partial D} \partial_z \frac{f(w)}{(w-z)^3} dw.$$

Das Integrand ist immer noch eine holomorphe Funktion für $z \in D$. Wir können dieses so oft wiederholen, wie wir wollen. Allgemein gilt:

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}} dw.$$

Wir können diese für jedes $z_0 \in G$ tun, um zu zeigen, dass in einer Umgebung von jedem Punkt in G, f unendlich-mal komplex differenzierbar ist. □

Bemerkung: Man sieht hier ein GRÖSSES Unterschied zwischen $\mathbb{R}$ Differenzierbarkeit und $\mathbb{C}$ Differenzierbarkeit. Dasselbe gilt nicht für $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Was wäre ein Beispiel? (vlt. $f(x) = x^\alpha$ für irgendein α. . .

Proposition 6.5 (Morera). *Es sei f eine stetige Funktion auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ und sei*

$$\int_{\partial T} f(z) dz = 0$$

für jeden Dreieck $T \subset\subset G$. Dann ist f auf G holomorph.

Proof. Es sei $D \subset\subset G$ eine Kreisscheibe. Dann gilt für jeden $T \subset D$,

$$\int_{\partial T} f(z)dz = 0,$$

da T auch $\subset\subset G$. Wir bemerken, dass D konvex und dementsprechend auch sternformig ist. Also folgt es aus der Proposition 5.5, dass f eine Stammfunktion F auf D hat. Ist also

$$F'(z) = f(z), \quad \forall z \in D.$$

Laut dem Satz ist F unendlich mal $\mathbb{C}$ differenzierbar und dementsprechend ist auch f. Ist also f holomorph auf D. Da für jeden $z_0 \in G$ es $r > 0$ gibt, sodass $D = D_r(z_0) \subset\subset G$, haben wir gezeigt, dass f auf G holomorph ist. $\square$

Satz 6.6 (Riemannische Fortsetzungssatz)**.** *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $z_0 \in G$, sodass f auf $G \setminus \{z_0\}$ holomorph ist und es $r, M > 0$ gibt, sodass*

$$|f(z)| < M, \quad \forall z \in G \text{ mit } |z - z_0| < r.$$

Dann gibt es eine eindeutige holomorphe Fortsetzung von f, die holomorph auf G ist.

Proof. Da f in der Nähe von z_0 beschränkt ist, gilt

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)f(z) = 0.$$

Dementsprechend ist die Funktion

$$F(z) = \begin{cases} (z - z_0)f(z) & z \neq z_0 \\ 0 & z = z_0 \end{cases}$$

holomorph auf G und stetig in z_0. Aus dem ersten Lemma dieses Abschnitts ist

$$\int_{\partial T} F(z)dz = 0,$$

für jeden Dreieck $T \subset\subset G$. Folgt es also aus der Proposition von Morera, dass F holomorph auf G ist. Dann gilt:

$$F'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} f(z).$$

Gibt es also ein eindeutiger Grenzwert $\lim_{z \to z_0} f(z)$, nämlich $F'(z_0)$ und wir definieren die Fortsetzung

$$\tilde{f}(z) := \begin{cases} f(z) & z \neq z_0 \\ F'(z_0) & z = z_0 \end{cases}$$

$\square$

7. Potenzreihen Holomorphe Funktionen

Holomorphe Funktionen sind nich nur supermegadifferenzierbar sondern auch besitzen jeweils eine Potenzreihe.

Satz 7.1 (Potenzreiheit)**.** *Es sei f eine holomorphe Funktion auf dem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ und $z_0 \in G$. Dann gibt es $r > 0$, sodass auf $D = D_r(z_0)$ ist*

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k (z - z_0)^k, \quad a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0).$$

Der Konvergenzradius $\rho(z_0)$ erfült

$$\rho \geq \sup\{\rho > 0 \, s.d. D_\rho(z_0) \subset\subset G\}.$$

Proof. Wir verwenden das Cauchy-Integralformel auf $D_r(z_0)$
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(w)}{w-z}dw.$$
Wir schreiben
$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}} = \frac{1}{w-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n.$$
Für jeden $z \in D$ ist
$$\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| < \frac{r}{r} = 1,$$
also konvergiert die geometrische Reihe absolut
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n.$$
Da f auf ∂D gleichmäßig beschränkt ist, konvergiert ebenso die Reihe
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n.$$
Ist also
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n dw = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n dw$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.$$
Laut dem Identitätssatz sind die Koeffizienten der Potenzreihen eindeutig. Wir können das gleiche auf $D_\rho(z_0)$ tun, für jede $\rho > 0$ sodass $D_\rho(z_0) \subset\subset G$, dementsprechend folgt die Aussage wegen des Konvergenzradiuses. □

Mithilfe dieses Satzes können wir eine stärkere Identätssatz formulieren. Wir werden vorher einen topologischen Hilfsatz beweisen.

Lemma 7.2 (Clopen)**.** *Es sei M offen sowie abgeschlossen und $M \subset G$ wobei G offen und zusammenhängend ist. Dann ist $M = G$ oder $M = \emptyset$.*

Proof. Angenommen ist $M \neq \emptyset$. Beweis durch Wiederspruch. Sei $M \neq G$. Dann gibt es $q \in G \backslash M$. Da G zusammenhängend ist, gibt es einen Weg in G von q nach M. Dementsprechend gibt es eine Folge $\{p_n\} \subset G \setminus M$ sowie $p \in M$ sodass
$$d(p_n, p) \to 0.$$
Da $p \in M$ und M offen ist, gibt es $\epsilon > 0$ sodass
$$B_\epsilon(p) \subset M.$$
Wegen $p_n \to p$ gibt es $N \in \mathbb{N}$ sodass
$$d(p_n, p) < \epsilon \forall n \geq N.$$
Dann ist $p_n \in M \ \forall n \geq N$, was wiederspricht $\{p_n\} \subset G \setminus M$. □

Proposition 7.3 (Identitätssatz v.2)**.** *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und f sowie g holomorphe Funktionen auf G. FASÄ*

(1) Es gibt $z_0 \in G$ und eine Folge $\{z_n\} \subset G \setminus \{z_0\}$ die gegen z_0 konvergiert, sodass
$$f(z_k) = g(z_k) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$
(2) $f \equiv g$
(3) Es gibt $z_0 \in G$ sodass $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0) \ \forall \ n \geq 0$.

Proof. Es ist klar, dass (2) $\implies$ (1) sowie (3). Betrachten wir die Funktion $h = f - g$. Nehmen wir (1) an, also gibt es eine z_0 und eine Folge sodass

$$h(z_k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

und wollen wir zeigen, dass

$$h \equiv 0.$$

Betrachten wir die Potenzreihe

$$h(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n.$$

Es folgt aus der Stetigkeit h, dass

$$h(z_0) = \lim_{n \to \infty} h(z_n) = 0 \implies a_0 = 0.$$

Es sei denn $a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-1} = 0$ für $n \geq 1$. Dann ist

$$h(z) = (z - z_0)^n (a_n + a_{n+1}(z - z_0) + \ldots) = (z - z_0)^n H(z),$$

und H ist stetig in z_0. Da $z_n \neq z_0 \; \forall \; n \in \mathbb{N}$ aber $h(z_n) = 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$ müss $H(z_n) = 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$. Dementsprechend ist

$$H(z_0) = \lim_{n \to \infty} H(z_n) = 0.$$

Laut der Definition H ist

$$a_n = H(z_0).$$

Ist also $a_n = 0$. Dieses zeigt, dass (1) $\implies$ (3). Ferner gilt, da der Potenzreihe in einer Umgebung von z_0 gleich die Funktion h ist,

$$h(z) \equiv 0 \text{ in einer Umgebung von } z_0.$$

Nehmen wir jetzt also (3) an. Laut dem Satz der Potenzreihen holomorphe Funktionen (Potenzreiheit) gibt es $r > 0$, sodass $h(z) = 0 \; \forall \; z \in D_r(z_0) \subset\subset G$. Es sei

$$M := \{z_1 \in G : \text{ es } r > 0 \text{ gibt, sodass } h(z) = 0 \, \forall \, z \in D_r(z_1)\}.$$

Falls $z_1 \in M$, dann gibt es $r > 0$, sodass $\forall \; z \in D_r(z_1) \; h(z) = 0$. Dann ist für $z_2 \in D_{r/2}(z_1)$

$$|z - z_2| < r/2 \implies |z - z_1| \leq |z - z_2| + |z_2 - z_1| < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r,$$

also ist

$$z \in D_r(z_1) \implies h(z) = 0.$$

Ist also

$$D_{r/2}(z_1) \subset M.$$

Dementsprechend ist M offen. Angenommen (widerspruch) M sei nicht abgeschlossen in G, dann gibt es $z^* \in G \setminus M$ und eine Folge $\{z_n\} \subset M$ die gegen z^* konvergiert. Da $z^* \notin M$, ist also $\{z_n\} \subset G \setminus \{z^*\}$. Aus dem ersten Teil ist also $h^{(n)}(z^*) = 0 \; \forall \; n \geq 0$. Danach verschwindet die Potenzreihe von h in einer Umgebung von z^* was bedeutet, dass es $r^* > 0$ gibt, sodass

$$h(z) = 0 \, \forall z \in D_{r^*}(z^*) \implies z^* \in M.$$

Ist also M offen sowie abgeschlossen in G. Da $z_0 \in M$ ist $M \neq \emptyset$ und da G ein Gebiet (d.h. offen und zusammenhängend) ist, müss $M = G$. Dementsprechend ist $h \equiv 0$ auf G. □

Wir können unsere Ergebnisse über holomorphe Funktionen jetzt so zusammenfassen.

Satz 7.4. *Es sei $f : U \to \mathbb{C}$ wobei $U \subset \mathbb{C}$ offen ist. F. A. S. Ä.*

(1) f ist holomorph.
(2) f ist reel differenzierbar und die Cauchy-Riemann Gleichungen gelten für f.
(3) Für jeden $z \in U$ gibt es $r > 0$ sodass in $D_r(z)$ f eine Entwicklung als absolut konvergente Potenzreihe besitzt.
(4) Für jeden $z \in U$ gibt es $r > 0$ sodass es F eine holomorphe Funktion $F : D_r(z) \to \mathbb{C}$ gibt mit $F' = f$ auf $D_r(z)$.
(5) f ist stetig und für jeden Dreieck $T \subset\subset U$, $\int_{\partial T} f(z)dz = 0$.

8. Weitere Eigenschaften holomorphe Funktionen

Jetzt haben wir die notwendige Grundlagen, um noch mehr Eigenschaften holomorphe Funktion zu bestimmen.

Proposition 8.1 (Cauchy-Ungleichungen). *Es sei f holomorph in einer (offenen) Umgebung*

$$U \supset \overline{D_R(z_0)}.$$

Es sei $0 < r < R$. Dann für jede $z \in \partial D_r(z_0)$ und $n \geq 0$,

$$\left| f^{(n)}(z) \right| \leq \frac{n! R}{(R-r)^{n+1}} \max_{w \in \partial D_R(z_0)} |f(w)|.$$

Proof. Laut dem Cauchy-Integralformel gilt:

$$\left| f^{(n)}(z) \right| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D_R(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw \right| \leq \frac{n!}{2\pi} 2\pi R \max_{w \in \partial D_R(z_0)} \frac{|f(w)|}{|w-z|^{n+1}}.$$

Da $w \in \partial D_R(z_0)$ gibt es $\theta \in \mathbb{R}$ sodass

$$w = z_0 + Re^{i\theta}.$$

Da $z \in \partial D_r(z_0)$ gibt es $\sigma \in \mathbb{R}$ sodass

$$z = z_0 + re^{i\sigma}.$$

Dementsprechend ist

$$|w - z| = \sqrt{(w-z)(\bar{w} - \bar{z})} = \sqrt{R^2 - 2\Re(Re^{i\theta} re^{i\theta}) + r^2}.$$

Wir bemerken, (da $\Re(z) \leq |z|$ gilt immer!)

$$2\Re(Re^{i\theta} re^{i\theta}) \leq 2Rr \implies R^2 - 2\Re(Re^{i\theta} re^{i\theta}) + r^2 \geq R^2 - 2Rr + r^2 = (R-r)^2$$
$$\implies |w - z| \geq |R - r| \text{ gilt } \forall w \in \partial D_R(z_0).$$

Dementsprechend ist

$$\max_{w \in \partial D_R(z_0)} \frac{|f(w)|}{|w-z|^{n+1}} \leq \frac{1}{(R-r)^{n+1}} \max_{w \in \partial D_R(z_0)} |f(w)|$$

und es gilt

$$\left| f^{(n)}(z) \right| \leq \frac{n! R}{(R-r)^{n+1}} \max_{w \in \partial D_R(z_0)} |f(w)|.$$

□

Satz 8.2 (Maximum Betrag). *Es sei f holomorph auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$. Falls $|f|$ ein Maximum im Punkt $z_0 \in G$ erreicht, dann ist f konstant. Falls $f \neq 0$ auf G und f ein Minimum im Punkt $z_0 \in G$ erreicht, dann ist f konstant.*

Proof. Es sei z_0 ein Maximum sodass gilt

$$|f(z)| \leq |f(z_0)| \quad \forall z \in D_R(z_0) \subset\subset G.$$

Das Cauchy-Integralformel impliziert

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt,$$

wobei wir den Integrationsweg $\gamma(t) = z_0 + re^{it} : [0, 2\pi] \to \partial D_r(z_0)$ verwendet haben, mit $\gamma'(t) = rie^{it}$¿ Dann haben wir

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it}| dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0)| dt = |f(z_0)|.$$

Damit diese gilt muss $|f(z_0 + re^{it}| = |f(z)| = |f(z_0)|$ fast überall gelten. Da f stetig ist gilt also $|f(z)| = |f(z_0)|$ für jede $z \in D_R(z_0)$ (da $r \leq R$ zufällig war). Dementsprechend haben wir

$$|f|^2 = (f\bar{f}) = \text{ konstant auf } D_R(z_0).$$

Dementsprechend ist die Funktion $f\bar{f}$ holomorph. Falls $f \equiv 0$, dann sind wir fertig mit dem Beweis. Falls nicht dann ist $f\bar{f} = c > 0$ und dementsprechend da f holomorph ist und $|f| = c > 0 \implies f \neq 0$ ist

$$\bar{f} = c/f$$

auch holmorph. Die Ableitung ist also

$$\bar{f}'(z).$$

Laut der Produktregel ist als0

$$0 \equiv (c)' = (f\bar{f})'(z) = f'(z)\overline{f'(z)} = |f'(z)|^2,$$

also ist $f' \equiv 0$ auf $D_R(z_0)$. Dementsprechend ist f konstant und es gilt $f(z) \equiv f(z_0)$. Für die zweite Aussage ist, da $f \neq 0$ auf G die Funktion $g = 1/f$ holomorph und hat ein Maximum im Punkt z_0. Laut dem ersten Teil ist g konstant und es folgt, dass f ebenso konstant sein muss. □

Korollar 8.3. *Es sei $G \subset\subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ stetig auf $\overline{G}$ und holomorph auf G. Dann das Maximum $|f|$ wird auf ∂G erreicht und falls f nicht konsant ist, gilt*

$$|f(z)| < \max_{z \in \partial G} |f(z)|.$$

Falls f keine Nullstellen in G hat, dann erreicht $|f|$ sein Minimum auf ∂G und falls f nicht konstant ist, gilt

$$|f(z)| > \max_{z \in \partial G} |f(z)|.$$

Es gibt noch ein wichtiger Satz der Funktionentheorie, den wir bereits beweisen können.

Satz 8.4 (Liouville)**.** *Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine beschränkte holomorphe Funktion. Dann ist f konstant.*

Proof. Aus der Cauchy-Ungleichung gilt für jeden $R > 0$

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{R^n} \max_{w \in \partial_R(z_0)} |f(w)| \leq \frac{n!}{R^n} M,$$

wobei $M > 0$ erfült

$$|f(z)| \leq M \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

und so ein M existiert, da f auf $\mathbb{C}$ beschränkt ist. Es sei also $n \geq 1$. Dann lassen wir $R \to \infty$.

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!M}{R^n} \quad R \to \infty \implies |f^{(n)}(0)| = 0.$$

Dann für die holomorphe (ganze) Funktion

$$g(z) := f(0),$$

gilt im Punkt 0,

$$g^{(n)}(0) = f^{(n)}(0) \forall n \geq 0.$$

Laut dem Identitätssatz v.2 ist $f \equiv g$ auf $\mathbb{C}$. D.h. f ist konstant. □

Mithilfe dem Liouville Satz können wir auch den Fundamentalsatz der Algebra beweisen.

Satz 8.5 (Fundamentalsatz der Algebra)**.** *Es sei $p(z)$ ein Polynom mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$ mit dem Grad $n \geq 1$. Dann gibt es eine Eindeutige Menge $\{r_k\}_{k=0}^n \subset \mathbb{C}$ sodass*

$$p(z) = r_0 \prod_{k=1}^{n} (z - r_k).$$

Proof. Der Beweis ist durch Induktion. Es sei p ein Polynom Grades eins. Dann ist

$$p(z) = r_0 z + b, \quad r_0 \neq 0 \implies p(z) = r_0(z - b/r_0),$$

ist also $r_1 = b/r_0$. Satz ist in dem Fall bewiesen.
Nehmen wir jetzt an, dass der Satz für jeden Polynom Grades $n-1 \geq 1$ bewiesen ist. Es sei p ein Polynom Grades $n \geq 1$.
Beweis durch Wiederspruch: falls p keine Nullstellen in $\mathbb{C}$ hat, dann ist $f(z) := \frac{1}{p(z)}$ eine ganze Funktion. Da der Grad von p größer gleich eins ist, gilt

$$|p(z)| \geq c|z|^n,$$

für eine Konstante $c > 0$. Insbesondere

$$|p(z)| \to \infty \text{ als } |z| \to \infty \implies |f(z)| \to 0 \text{ als } |z| \to \infty.$$

Nämlich gibt es $R > 0$ sodass

$$|f(z)| < 1 \forall |z| \geq R.$$

Da $R\mathcal{D}$ beschränkt ist, ist $|f|$ auf $\overline{R\mathcal{D}}$ beschränkt (f ist ja stetig). Ist also f ganz und beschränkt auf $\mathbb{C}$ und dementsprechend laut dem Liouville-Satz konstant. Dann muss aber p auch konstant sein was zu einem Wiederspruch führt, da der Grad von p größer gleich eins ist.
Dementsprechend hat p eine Nullstelle r_n. Wir definieren r_0 also die Koeffizient von dem Term in p Grades n. Ist also

$$p(z) = r_0(z - r_n)q(z).$$

Falls der Grad von q gleich Null ist, dann muss $q(z) = 1$ (Definition r_0). Falls der Grad von q größer gleich eins ist dann laut Induktion

$$q(z) = s_0 \prod_{k=1}^{n-1}(z - r_k) \implies p(z) = r_0 s_0 \prod_{k=1}^{n}(z - r_k).$$

Damit die Koeffizient z^n gleich r_0 ist, muss $s_0 = 1$. Also ist

$$p(z) = r_0 \prod_{k=1}^{n}(z - r_k).$$

Die Eindeutigkeit r_0 folgt aus der Definition r_0. Falls

$$p(z) = r_0 \prod_{k=1}^{n}(z - s_k) \implies \prod_{k=1}^{n}(z - s_k) = \prod_{k=1}^{n}(z - r_k).$$

Falls $s_k \notin \{z_j\}$ dann teilt $(z - s_k)$ p und

$$p(z) = r_0(z - s_k)\prod_{j=1}^{n}(z - r_j) \text{ nicht Grad } n \text{ sondern Grad } n+1.$$

Die Nullstellen sind dementsprechend eindeutig. □

9. Singularitäten!

Manchmal ist eine Funktion schön und holomorph bis auf manche Stellen. Niemand ist perfekt, zum Beispiel

$$\frac{1}{z},$$

oder noch wesentclich schlimmer

$$e^{1/z}.$$

Wenn eine Funktion bis auf einige Stellen holomorph ist dann kann man identifizieren, genau wie schlimm diese Stellen sind.

Definition 9.1. Es sei f holomorph auf $D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$. Dann nennen wir dem Punkt z_0 eine *isolierte Singularität* der Funktion f.

Es gibt genau drei Möglichkeiten.

(1) f hat eine eindeutige holomorphe Fortsetzung auf $D_r(z_0)$ und wir nennen z_0 eine abziehare Singularität.
(2) $1/f$ hat eine eindeutige holomorphe Fortsetzung g auf $D_\delta(z_0)$ für irgendeine $0 < \delta < r$, sodass $g(z_0) = 0$, und wir nennen z_0 ein Pol.
(3) Falls (1) sowie (2) nicht gelten ist z_0 eine wesentliche Singularität.

Satz 9.2 (Identität der Singularität)**.** *Es sei f holomorph auf $D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$. Dann hat f ein Pol in z_0 genau dann, wenn*

$$\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty.$$

Proof. Erst nehmen wir an, dass f ein Pol in z_0 hat. Dann sei $g := 1/f$ definiert auf $D = D_\delta(z_0)$. Da g holomorph und deswegen auch stetig ist gilt

$$\lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0 \implies \lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty.$$

Anderseits sei

$$\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty.$$

Dann gibt es eine $\delta > 0$ mit $\delta < r$ sodass für jede $z \in \mathbb{C}$ mit $0 < |z - z_0| < \delta$,

$$|f(z)| > 1 \implies \frac{1}{f} \text{ ist holomorph auf } D_\delta(z_0) \setminus \{z_0\},$$

und ferner gilt

$$\left|\frac{1}{f(z)}\right| \leq 1 \quad \forall z \in D_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}.$$

Laut der Riemannische Fortsetzungssatz hat $1/f$ eine eindeutige holomorphe Fortsetzung g auf $D_\delta(z_0)$ und da die Fortsetzung auch stetig ist (holomorph $\implies$ stetig) gilt

$$\lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0 = g(z_0).$$

□

Fall (3) ist etwas besonders. Wir werden folgenden Satz nicht beweisen, er ist allerdings gut zu wissen.

Satz 9.3 (Der größer Satz von Picard)**.** *Es sei z_0 eine Singularität der art (3). Dann für jede $r > 0$ gibt es $w \in \mathbb{C}$ sodass*

$$f(D_r(z_0) \setminus \{z_0\}) \supset \mathbb{C} \setminus \{w\}.$$

Das heisst, dass die Funktion f sich total WILD läuft in jeder Umgebung von z_0. Die Funktion nimmt nämlich *jeden Wert außer vielleicht einen an !!*
Wir wollen dementsprechend uns fern von solchem Punkten halten.

Definition 9.4. Eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ heißt *meromorph,* falls die Funktion holomorph bis auf eine endliche Menge Punkten in G in dem die Funktion Singularitäten der Art (1) oder (2) (Polen) hat.

Proposition 9.5. *Es sei $f : U\setminus\{z_0\}$ holomorph und z_0 sei ein Pol. Dann gibt es eine eindeutige $k \geq 1$ sowie eine holomorphe Funktion $g : U \to \mathbb{C}$, sodass $g(z_0) \neq 0$ und*

$$f(z) = (z - z_0)^{-k} g(z) \quad \forall z \in U \setminus \{z_0\}.$$

Die Zahl k heißt der Grad des Pols z_0. Falls $k = 1$ dann ist das Pol einfach.

Proof. Es gibt $r > 0$ sodass die Funktion $h = 1/f$ holomorph auf $D_r(z_0) \subset U$ ist und $h(z_0) = 0$. Die Funktion h hat eine eindeutige Potenzreihe auf $D_r(z_0)$,

$$h(z) = \sum_{k\geq 0} a_k (z - z_0)^k, \quad a_k = \frac{h^{(k)}(z_0)}{k!}.$$

Da f holomorph auf $D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ ist, kann die Funktion $h \not\equiv 0$ auf $D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$. Dementsprechend gibt es laut dem Identitätssatz gibt $k \in \mathbb{N}$ sodass

$$h^{(k)}(z_0) \neq 0.$$

Es sei k die kleinste davon. Da $h(z_0) = 0$ ist $k \geq 1$. Dementsprechend ist

$$h(z) = \sum_{j \geq k} a_j (z - z_0)^j = (z - z_0)^k \sum_{j \geq 0} a_{k+j}(z - z_0)^j,$$

also sei

$$H(z) := \sum_{j \geq 0} a_{k+j}(z - z_0)^j \implies H(z_0) = a_k = \frac{h^{(k)}(z_0)}{k!} \neq 0.$$

Die Funktion H is holomorph auf $D_r(z_0)$. Da $H(z_0) \neq 0$, gibt es $\rho \in (0, r)$ sodass $H \neq 0$ auf $D_\rho(z_0)$. Dann ist die Funktion

$$g := 1/H$$

holomorph auf $D_\rho(z_0)$. Ferner gilt

$$\frac{1}{f}(z) = h(z) = (z - z_0)^k H(z) \implies f(z) = (z - z_0)^{-k} g(z) \text{ auf } D_\rho(z_0),$$

und

$$g(z_0) = 1/H(z_0) = 1/a_k \neq 0.$$

Falls es auch $j \geq 1$ sowie eine Funktion u damit die Voraussetzungen erfült sind OBDA ist $j > k$. Dann aber ist

$$f(z) = (z - z_0)^{-j} u(z) = (z - z_0)^{-k} g(z) \implies u(z) = (z - z_0)^{j-k} g(z) \to 0 \text{ as } z \to z_0$$

also müss $u(z_0) = 0$ was ein Wiederspruch ist. Dementsprechend ist k und danach auch g eindeutig. □

Proposition 9.6. *Es sei f holomorph auf $U \setminus \{z_0\}$ mit einem Pol Grades k in z_0. Dann gibt es eine* Laurent-Entwicklung

$$f(z) = a_{-k}(z - z_0)^{-k} + \ldots + a_{-1}(z - z_0)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

wobei

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

Proof. Nach dem Beweis der letzten Proposition ist

$$f(z) = (z - z_0)^{-k} g(z) = \sum_{n \geq 0} b_n (z - z_0)^{n-k}, \quad g(z) = \sum_{n \geq 0} b_n (z - z_0)^n,$$

da die Funktion g holomorph auf $D_r(z_0)$ ist und dementsprechend eine konvergente Potenzreihe hat. Die Koeffiziente $\{b_n\}$ sind eindeutig. Für $n \geq k$ ist also

$$a_n = b_{n+k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{g(z)}{(z - z_0)^{n+k+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{(z - z_0)^{-k} g(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

□

10. Allgemeine Cauchy-Integralformel

Wir möchten verstehen, was das Integral einer holomorphen Funktion, auf einem allgemeinen Integrationsweg ist.

Definition 10.1. Ein abgeschlossener Integrationsweg heisst *einfach,* falls die Spur nur einmal auf dem Weg laüft und die Spur sich nicht überschneidet. Äquivalent ist, dass der Weg injektiv bis auf einem Punkt ist (das Anfangs/Endpunkt).

Zum Beispiel, $\gamma(t) = e^{it} : [0, 2\pi] \to \partial\mathcal{D}$ ist einfach, aber $\gamma(t) = e^{it} : [0, 4\pi] \to \partial\mathcal{D}$ ist nicht.

Definition 10.2. Es sei γ ein einfacher abgeschlossener Integrationsweg. Es sei G das Gebiet, die γ abschliesst. Falls auf dem Weg γ G immer nach Links ist, dann heisst γ *positiv orientiert.* Falls auf dem Weg γ G immer nach Rechts ist, dann heisst γ *negativ orientiert.*

Zu Beispiel ist der Weg $\gamma(t) = e^{it} : [0, 2\pi] \to \partial\mathcal{D}$ positiv orientiert wobei der Weg $\sigma(t) = e^{-it} : [0, 2\pi] \to \partial\mathcal{D}$ negativ orientiert ist. Wir berechnen

$$\int_0^{2\pi} |\gamma'(t)|dt = 2\pi = \int_0^{2\pi} \gamma'(t)dt = -\int_0^{2\pi} \sigma'(t)dt.$$

Satz 10.3 (Allgemeine Cauchy-Integralsatz)**.** *Es sei G ein Gebiet und γ sowie σ zwei abgeschlossene einfache positiv orientierte Integrationswege, die jeweils von $[0, 1] \to G$ abbilden, sodass es eine stetige Abbildung $\Phi(t, s) : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{C}$ gibt, mit*

(1) $\Phi(t, 0) = \gamma(t)$ für jede $t \in [0, 1]$
(2) $\Phi(t, 1) = \sigma(t)$ für jede $t \in [0, 1]$
(3) $\Phi(0, s) = \Phi(1, s)$ für jede $s \in [0, 1]$.

Dann nennt man γ und σ äquivalent bis auf Homotopie. Es sei ferner die Spur von $\Phi(t, s) : [0, 1] \to \mathbb{C}$ in G liegt. Dann gilt für jede holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$,

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\sigma f(z)dz.$$

Proof. Die Funktion $\Phi : [0, 1] \times [0, 1] \to G$ ist stetig und invertierbar. Die Idee des Beweises ist, dass wir $[0, 1]^2$ in kleinen Rechtecken aufteilen. Es sei $\varepsilon > 0$, dann da Φ stetig ist, gibt es eine $\delta > 0$ sodass, für $|x - y| < \delta$, $|\Phi(x) - \Phi(y)| < \epsilon$. Wir teilen $[0, 1]^2$ in einer Gitte auf, sodass der Durchmesser jedes Rechtecks $< \delta$. Z.B.

$$t_j = \frac{j}{n}, \quad s_k = \frac{k}{n}, \quad 1/n < \frac{\delta}{\sqrt{2}}.$$

Es sei $\Phi_{j,k} := \Phi(t_j, s_k) \in G$. Da der Durchmesser jedes Rechtecks $< \delta$, ist der Bild bzgl. Φ

$$\Phi([t_j, t_{j+1}] \times [s_k, s_{k+1}]) \subset D_\epsilon(\Phi_{jk}).$$

Da $\Sigma = \Phi([0, 1] \times [0, 1])$ eine kompakte Teilmenge G ist und komplett in G (offen) liegt, können wir $\epsilon > 0$ so klein wählen, dass

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - \Sigma| \le \epsilon\} \subset\subset G.$$

Dann ist jede $D_\epsilon(\Phi_{jk}) \subset\subset G$. Diese ist konvex und dementsprechend sternformig ist also das Integral von f auf jedem Weg in dieser Kreisscheibe $= 0$. Insbesondere sei der Integrationsweg (genauer gesagt, die Spur des Integrationsweg)

$$R_{j,k} = [\Phi_{j,k}, \Phi_{j+1,k}] \cup [\Phi_{j+1,k}, \Phi_{j+1,k+1}] \cup [\Phi_{j+1,k+1}, \Phi_{j,k+1}] \cup [\Phi_{j,k+1}, \Phi_{j,k}].$$

Dann laut dem CIF für sternformige Gebiet (und eine Kreisscheibe ist sternformig!) ist

$$\int_{R_{jk}} f(z)dz = 0.$$

Gilt also ebenso

$$\sum_{j,k} \int_{R_{jk}} f(z)dz = 0.$$

Für $0 < j < n$ sowie $0 \leq k < n$ ist der Weg $\Phi_{j,k+1} \to \Phi_{j,k}$ in $R_{j,k}$ und ist aber der Weg umgekehrt $\Phi_{j,k} \to \Phi_{j,k+1}$ in $R_{j-1,k}$.

$$R_{j-1,k} = [\Phi_{j-1,k}, \Phi_{j,k}] \cup [\Phi_{j,k}, \Phi_{j,k+1}] \cup [\Phi_{j,k+1}, \Phi_{j-1,k+1}] \cup [\Phi_{j-1,k+1}, \Phi_{j-1,k}].$$

Dementsprechend bleiben nur die Wege $\Phi_{0,k+1} \to \Phi_{0,k}$ sowie $\Phi_{n,k} \to \Phi_{n,k+1}$.
Für $0 \leq j < n$ sowie $0 < k < n$ ist der Weg $\Phi_{j,k} \to \Phi_{j+1,k}$ in $R_{j,k}$ und rückwärts in $R_{j,k-1}$, da

$$R_{j,k-1} = [\Phi_{j,k-1}, \Phi_{j+1,k-1}] \cup [\Phi_{j+1,k-1}, \Phi_{j+1,k}] \cup [\Phi_{j+1,k}, \Phi_{j,k}] \cup [\Phi_{j,k}, \Phi_{j,k-1}].$$

Dementsprechend bleiben nur die Wege $\Phi_{j,0} \to \Phi_{j+1,0}$ sowie $\Phi_{j+1,n} \to \Phi_{j,n}$.
Die Wege $\Phi_{0,k+1} \to \Phi_{0,k}$ in $R_{0,k}$ sowie $\Phi_{n,k} \to \Phi_{n,k+1}$ in $R_{n-1,k}$. Laut der Definition von Φ, ist

$$\Phi_{0,k} = \Phi(0, s_k), \quad \Phi_{n,k} = \Phi(1, s_k) \implies \Phi_{0,k} = \Phi_{n,k},$$

und ebenso gilt

$$\Phi_{0,k+1} = \Phi(0, s_{k+1}) = \Phi(1, s_{k+1}) = \Phi_{n,k+1}.$$

Dementsprechend sind die Wege $\Phi_{0,k} \to \Phi_{0,k+1}$ in $R_{0,k}$ sowie $\Phi_{n,k} \to \Phi_{n,k+1}$ in $R_{n-1,k}$ das gleiche nur in den genau gegenen Richtungen geläufen also fallen diese auch weg. Haben wir also insgesamt

$$\sum_{j,k=0}^{n} \int_{R_{j,k}} f(z)dz = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{[\Phi_{j,0}, \Phi_{j+1,0}]} f(z)dz + \sum_{j=0}^{n-1} \int_{[\Phi_{j+1,n}, \Phi_{j,n}]} f(z)dz = 0$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{[\Phi_{j,0}, \Phi_{j+1,0}]} f(z)dz - \sum_{j=0}^{n-1} \int_{[\Phi_{j,n}, \Phi_{j+1,n}]} f(z)dz.$$

Laut der Definition Φ sind die Wege $[\Phi_{j,0}, \Phi_{j+1,0}]$ sowie $\{\gamma(t) : t \in [t_j, t_{j+1}]\}$ in $D_\epsilon(\Phi_{j,0})$ mit demselben Anfangs- sowie Endpunkte. Ist das Integral also auf $[\Phi_{j,0}, \Phi_{j+1,0}]$ und danach auf γ rückwärts gleich 0 und da das Integral auf γ rückwarts gleich $-\int_\gamma$

$$\implies \int_{[\Phi_{j,0}, \Phi_{j+1,0}]} f(z)dz - \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(\gamma(s))\gamma'(s)ds = 0$$

$$\implies \int_{[\Phi_{j,0}, \Phi_{j+1,0}]} f(z)dz = \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(\gamma(s))\gamma'(s)ds.$$

Ebenso da $\Phi(t, 1) = \sigma(t)$ ist

$$\int_{[\Phi_{j,n}, \Phi_{j+1,n}]} f(z)dz = \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(\sigma(s))\sigma'(s)ds.$$

Damit haben wir insgesamt

$$\sum_{j=0}^{n-1} \int_{[\Phi_{j,0}, \Phi_{j+1,0}]} f(z)dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)dt,$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \int_{[\Phi_{j,n}, \Phi_{j+1,n}]} f(z)dz = \int_0^1 f(\sigma(t))\sigma'(t)dt$$

also

$$\int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)dt - \int_0^1 f(\sigma(t))\sigma'(t)dt = 0,$$

und dementsprechend sind beide Integrals das gleiche. □

Korollar 10.4. *Falls γ positiv orientiert ist und σ negativ orientiert ist, dann gilt*

$$\int_{\gamma \cup \sigma} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz + \int_\sigma f(z)dz = 0.$$

Proof. Der Beweis folgt aus

$$\int_{\gamma\cup\sigma} f(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz + \int_{\sigma} f(z)dz.$$

Für σ negativ orientiert mit $\sigma : [0,1] \to \mathbb{C}$ läuft also $-\sigma := \sigma(1-t) : [0,1] \to \mathbb{C}$ genau rückwärts auf der Spur von σ. Ist also $\sigma(1-t)$ positiv orientiert und es gilt

$$\int_{-\sigma} f(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz.$$

Da

$$\int_{-\sigma} f(z)dz = -\int_0^1 f(\sigma(1-t))\sigma'(1-t)dt = \int_1^0 f(\sigma(s))\sigma'(s)ds =$$
$$-\int_0^1 f(\sigma(s))\sigma'(s) = -\int_{\sigma} f(z)dz,$$

ist also

$$\int_{-\sigma} f(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz = -\int_{\sigma} f(z)dz,$$

und daraus folgt der Korollar. □

Beispiele Homotopie

(1) Es sei
$$\gamma(t) = z_0 + re^{2\pi it}, \quad \sigma(t) = z_0 + Re^{2\pi it}.$$
Dann sei
$$\Phi(t,s) := z_0 + (sR + (1-s)r)e^{2\pi it}.$$
Die Funktion ist stetig. Es gilt
$$\Phi(t,0) = \gamma(t), \forall\, t \in [0,1],$$
sowie
$$\Phi(t,1) = \sigma(t), \forall\, t \in [0,1],$$
und auch
$$\Phi(0,s) = z_0 + (sR + (1-s)r) = \Phi(1,s), \forall\, s \in [0,1].$$

(2) Es sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ ein einfacher abgeschlossener Integrationsweg. Es sei $p \in \mathbb{C}$. Dann sei $\sigma(t) := \gamma(t) + p$. Ist $\gamma \sim \sigma$ durch
$$\Phi(t,s) := \gamma(t) + sp.$$

(3) Es sei $\gamma \sim \sigma \sim \eta$ mithilfe Φ bzgl. $\gamma \sim \sigma$ sowie Ψ bzgl. $\sigma \sim \eta$. Dann ist $\gamma \sim \eta$ mithilfe
$$\Theta(t,s) = \begin{cases} \Phi(t,2s) & 0 \le s \le 1/2 \\ \Psi(t,2s-1) & 1/2 \le s \le 1 \end{cases}$$

Korollar 10.5. *Es sei γ sodass das Innere von γ komplett in G liegt. Dann ist*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Proof. Das Innere von γ komplett in G liegt. Ist γ dementsprechend Homotopie-äquivalent zu einem Punkt. Insbesonderer ist γ äquivalent zu σ wobei die Länge von σ so klein gewählt werden kann, wie wir möchten. Zum Beispiel angenommen ist 0 in dem Inneren von γ. Das können wir OBdA annehmen, da wir gerade gezeigt (Beispiel 2), dass jeder Weg äquivalent zu einer Translation des Wegs ist. Könnten wir also γ und G komplett verschieben, damit 0 innerhalb von γ liegt. Dann ist $\gamma \sim \varepsilon$, wobei

$$\varepsilon(t) = \varepsilon\gamma(t), \quad \Phi(t,s) = (1 + \varepsilon - s)\gamma(t).$$

Dann ist

$$\left|\int_{\gamma} f(z)dz\right| = \left|\int_{\varepsilon} f(z)dz\right| \le \varepsilon\mathcal{L}(\gamma)||f||_{\infty},$$

und da f holomorph ist und ε liegt in dem abgeschlossenen Gebiet, das die Spur von γ abschliesst, ist $||f||_\infty < 0$ also wir können die rechte Seite so klein wie wir möchten machen und dementsprechend muss

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| = 0 \iff \int_\gamma f(z)dz = 0.$$

□

Satz 10.6. *Es sei f holomorph auf einem Gebiet G und γ ein abgeschlossener einfacher Integrationsweg in G sodass das Innere der Spur von γ zusammen mit der Spur von γ kompakt in G liegen. Dann für z in dem inneren von der Spur von γ (aber nicht auf der Spur von γ) ist*

$$\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw = 2\pi i f(z).$$

Falls z in G ausserhalb von der Spur von γ liegt, dann ist

$$\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw = 0.$$

Proof. Im zweiten Fall ist die Funktion

$$g(w) = \frac{f(w)}{w-z}$$

holomorph auf γ sowie das Innere von γ, was komplett in G liegt. Die Aussage folgt also aus dem Korollar. Es bleibt also nur die erste Aussage. Für r klein genug, $D_r(z)$ im inneren von γ liegt. Dann da γ einfach sowie abgeschlossen ist, ist $\gamma \sim D_r(z)$. Es sei Φ die Homotopie zwischen γ sowie $\partial D_r(z)$. Dann da diese angenommen werden kann, nicht durch z zu laufen, ist die Funktion

$$\frac{f(w)}{w-z}$$

holomorph auf dem Inneren von γ ohne dem Inneren von $D_r(z)$. Laut dem ACI-Satz ist

$$\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw = \int_{D_r(z)} \frac{f(w)}{w-z}dw = 2\pi i f(z),$$

wobei die letzte Gleichung aus dem Cauchy-Integralformel folgt. □

11. Residum-Integrals

Satz 11.1 (Laurent-Darstellung)**.** *Es sei f holomorph auf*

$$K(z_0; r, R) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}.$$

Dann hat f eine eindeutige Entwicklung in einer Laurent-Darstellung

$$f(z) = f_0(z) + f_\infty(z),$$

sodass f_0 holomorph auf $D_R(z_0)$ ist und f_∞ holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \overline{D_r(z_0)}$ ist. Ferner gilt

$$f_\infty(z) \to \text{ als } |z| \to \infty.$$

Proof. Angenommen ist $0 \le r$. OBdA nehmen wir an, dass $z_0 = 0$.
Jetzt brauchen wir einen Bild. Es sei $r < r' < |z| < R' < R$. Wenn wir einen sehr kleinen Kreis um z betrachten, gilt

$$\int_{\partial D_\varepsilon(z)} \frac{f(w)}{w-z}dw = 2\pi i f(z).$$

Ferner gilt für jeden abgeschlossenen Integrationsweg γ der homotopie-äquivalent zu diesem Kreis ist

$$\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw = 2\pi i f(z).$$

Wenn wir statt den Weg den Weg erst auf $\partial D_{r'}$, dann kurz vor dem Punkt z abbiegen bis auf $\partial D_{R'}$ und dann nochmal zuruck, um den Punkt z zu vermeiden, haben wir einen abgeschlossenen Integrationsweg und im inneren ist

$$\frac{f(w)}{w-z} = g(w)$$

eine holomorphe Funktion. Dementsprechend verschwindet das Integral. Dieses Integral ist aber fast gleich

$$\int_{\partial D_{R'}} g(w)dw - \int_{\partial D_{r'}} g(w)dw - \int_\gamma f(w)dw,$$

bis auf zwei kleinen seiten, wobei γ ein kleinen Weg um z herum ist. Wir können γ immer kleiner machen und diese Seiten Integrals verschwinden und wir haben die Konvergenz

$$\int_{\partial D_{R'}} g(w)dw - \int_{\partial D_{r'}} g(w)dw \to \int_\gamma f(w)dw = 2\pi i f(z).$$

Definieren wir

$$f_0(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_{R'}} \frac{f(w)}{w-z}dw, \quad f_\infty(z) := -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_{r'}} \frac{f(w)}{w-z}dw.$$

Dann gilt

$$f(z) = f_0(z) + f_\infty(z).$$

Ferner gilt, da die Funktion

$$\frac{1}{w-z} \text{ holomorph für } |z| < |w| \text{ sowie } |z| > |w| \text{ ist,}$$

dass f_0 holomorph auf $D'_R(0)$ ist. Der Integrationsweg $\partial D_{R'}$ ist allerdings homotopie-äquivalent zu $\partial D_{R''}$ für jede $R' < R'' < R$ also bleibt das Integral gleich wenn wir $R' \to R$ lassen. Dementsprechend gibt es eine eindeutige Fortsetzung f_0 auf D_R.
Die Funktion f_∞ ist ebenso holomorph für $|z| > r'$ und da der Integrationsweg $\partial D_{r''}$ homotopie-äquivalent zum Weg $D_{r'}$ für jede $r < r'' < r'$, bleibt das Integral gleich wenn wir $r' \to r$ lassen. Dementsprechend gibt es eine eindeutige Fortsetzung f_∞ auf

$$\{z : |z| > r\} = \mathbb{C} \setminus \overline{D_r}.$$

Ferner gilt

$$|f_\infty(z)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\partial D_r} \frac{f(w)}{w-z}dw\right| \le \frac{2\pi r}{2\pi(|z|-r)} \max_{w\in\partial D_r} |f(w)| \to 0 \text{ als } |z| \to \infty.$$

Angenommen gibt es eine zweite solche Darstellung,

$$f = h_0 + h_\infty.$$

Dann ist

$$0 = (f_0 - h_0) + (f_\infty - h_\infty)$$

eine Laurent-Darstellung der Funktion 0. Ferner gilt

$$f_0 - h_0 = -(f_\infty - h_\infty), \quad r < |z| < R.$$

Dementsprechend ist die Funktion

$$F(z) = (f_0(z) - h_0(z)), \quad |z| < R,$$

$$F(z) = -(f_\infty(z) - h_\infty(z)) \quad |z| > r$$

ganz. Da f_∞ sowie h_∞ gegen 0 also $|z| \to \infty$ ist diese Funktion F ganz sowie beschränkt und laut dem Satz von Liouville konstant. Sie müss, da sie gegen 0 als $|z| \to \infty$ konvergiert gleich 0 sein. Also ist

$$f_0 \equiv h_0, \quad f_\infty \equiv h_\infty.$$

$\square$

Satz 11.2 (Laurent-Entwicklung). *Es sei f holomorph auf*

$$K(z_0; r, R) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}.$$

Dann gibt es eine kompakt konvergente Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n.$$

Die Koeffizienten

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} f(z)(z - z_0)^{-(n+1)} dz,$$

wobei $\rho \in (r, R)$.

Proof. Es sei

$$f = f_0 + f_\infty$$

die eindeutige Laurent-Darstellung laut dem letzten Satz. Die Funktion f_0 ist schon auf $D_R(z_0$ holomorph und dementsprechend hat eine kompakt-konvergente Potenzreihe

$$f_0(z) = \sum_{j \geq 0} b_j (z - z_0)^j.$$

Die Funktion f_∞ ist holomorph für $|z - z_0| > r$ und da

$$\lim_{z \to \infty} f_\infty(z) = 0,$$

können wir die Funktion

$$g(w) := f_\infty(1/w), \quad w := (z - z_0),$$

holomorph auf

$$\{w \in \mathbb{C} : |w| < r\} \setminus \{0\}$$

fortsetzen. Da aber

$$\lim_{w \to 0} g(w) = 0,$$

können wir g holomorph auf D_r fortsetzen (laut dem Riemannische-Hebbare-Singularität Satz z.B.). Dann hat g auch eine kompakt-konvergente Potenzreihe,

$$g(w) = \sum_{k \geq 0} c_k w^k = \sum_{k \geq 0} c_k (z - z_0)^{-k}, \quad c_0 = g(0) = 0.$$

Wir definieren also

$$a_n := b_n, \quad n \geq 0, \quad a_n := c_{-n}, \quad n < 0.$$

Damit haben wir die Entwicklung f als Laurent-Reihe,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Dann ist also

$$\int_{|z-z_0|=\rho} f(z)(z - z_0)^{-(n+1)} dz = \int_{|z-z_0|=\rho} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-n-1} dz.$$

Für $k \neq n$ hat die Funktion

$$(z - z_0)^{k-n-1}$$

die Stammfunktion

$$\frac{(z - z_0)^{k-n}}{k - n}, \quad z \neq z_0,$$

also laut Proposition ist das Integral 0 für jede $k \neq n$. Es bleibt also nur

$$\int_{|z-z_0|=\rho} a_n (z - z_0)^{-1} dz = 2\pi i a_n.$$

Dementsprechend ist

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} f(z)(z-z_0)^{-(n+1)} dz.$$

□

Satz 11.3 (Residum-Satz)**.** *Es sei $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph auf G bis auf eine endliche Menge $\{z_j\}_{j=1}^n$. Es sei G einfach zusammenhangend. Dann für jeden abgeschlossenen einfachen Integrationsweg γ in G, der nicht durch irgendeine (oder mehre) z_j läuft gilt:*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum \operatorname{Res}_{z_j} f : \text{ wobei } z_j \text{ im inneren von } \gamma \text{ sind,}$$

und

$$\operatorname{Res}_{z_j}(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{D_\delta(z_j)} f(z)dz,$$

wobei δ so klein gewählt ist, dass nur $z_j \in D_\delta(z_j)$ liegt und kein z_k für $k \neq j$. Falls γ keinen z_j im inneren hat, dann ist das Integral $\int_\gamma f = 0$.

Proof. Angenommen ist $n = 1$. Falls z_1 nicht innerhalb γ liegt, dann ist f im inneren von γ holomorph und da G einfach zusammenhangend ist, ist γ homotopie-äquivalent zu einem Punkt also ist das Integral von f auf γ gleich 0.
Falls z_1 doch im inneren von γ ist, dann ist γ homotopie-äquivalent zu jedem Kreis um z_1 mit Radius δ klein genug, sodass $D_\delta(z_1)$ innerhalb γ ist. Dann ist laut dem Cauchy-Integralsatz

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{D_\delta(z_j)} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z_1} f.$$

Für $n = 2$, brauchen wir einen Bild.

$$\int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f,$$

wobei wir den Weg γ zwischen den Punkten z_1 sowie z_2 schneiden. Der Weg γ_1 geht auf γ bis um den Schnitt um z_1 und macht einen etwaige Kreis um z_1. Der Weg γ_2 geht auf γ weiter und dann geht in genau die andere Richtung auf dem Schnitt damit das Integral auf dem Schnitt verschwindet (einmal in einer Richtung, einmal in der Gegenrichtung macht insgesamt 0). Der Weg γ_2 geht um z_2 herum. Dementsprechend folgt es aus dem ersten Fall, dass

$$\int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f = 2\pi i (\operatorname{Res}_{z_1} f + \operatorname{Res}_{z_2} f).$$

Mithilfe Induktion angenommen gilt die Aussage für n. Für $n+1$, machen wir ebenso einen Umweg auf dem letzten Punkt und

$$\int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f.$$

Laut Induktion ist

$$\int_{\gamma_1} f = \sum_{k=1}^n 2\pi i \operatorname{Res}_{z_k} f,$$

und laut dem ersten Fall ist

$$\int_{\gamma_2} f = 2\pi i \operatorname{Res}_{z_{n+1}} f.$$

□

Letztendlich was ist

$$\operatorname{Res}_z f?$$

Proposition 11.4. *Es sei f holomorph auf $D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$. Es sei*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

die Laurent-Entwicklung von f. Dann ist

$$\mathrm{Res}_{z_0} f = a_{-1}.$$

Proof. Für $n \neq -1$ hat

$$(z - z_0)^n$$

eine Stammfunktion auf $D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$, nämlich

$$F(z) = \frac{(z - z_0)^{n+1}}{n+1}.$$

Dementsprechend (da die reihe kompakt-konvergiert) gilt:

$$\int_{D_\delta(z_0)} f(z)dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_{D_\delta(z_0)} (z - z_0)^n dz = a_{-1} \int_{D_\delta(z_0)} \frac{1}{z - z_0} dz$$
$$= 2\pi i a_{-1}.$$

$\square$

11.1. **Kluge Anwendungen auf Integrals auf $\mathbb{R}$!!** Sie haben einen schwierigen Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx?$$

Sie können den nicht berechnen? Naja, setzen Sie die Funktionentheorie-Brillen mal auf. Ist die Funktion

$$f(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

definiert? Sie setzen $z \in \mathbb{C}$ für $x \in \mathbb{R}$ einfach in der Definition von f ein. Wie sieht die Funktion aus? Die Idee ist, sie integrieren f in $\mathbb{C}$ auf irgend einen abgeschlossenen einfachen Integrationsweg γ, sodass eine Seite das Intervall $[-R, R] \subset \mathbb{R}$ ist. Dann machen Sie den Weg immer grösser und betrachten Sie, was passiert auf den verschiedenen Teilen von γ. Das Integral auf dem abgeschlossenen Integrationsweg γ können Sie mit dem Satz berechnen (die Summe der $a'_{-1}s$ in der jeweiligen Laurtent-Entwicklungen - oder einfach 0 falls f keine Singularitäten hat). Damit können Sie $R \to \infty$ lassen und das ursprünglichen Integral berechnen.
Es gibt auch kluge Variationen aber die Idee ist immer die gleiche.
Wir machen Beispiele an der Tafel!
Es sei

$$I := \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \sin t}, \quad a > 1.$$

Wir verwenden $z = e^{it}$ sowie $\sin t = \frac{1}{2i}(z - z^{-1})$ um das Integral so darzustellen

$$I = \int_{\partial \mathcal{D}} \frac{1}{a + \frac{1}{2i}(z - z^{-1})} \frac{dz}{iz},$$

wobei wir den Integrationsweg $\gamma(t) = z = e^{it}$ verwendet haben. Insbesondere gilt

$$\int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)dt}{f(\gamma(t)} = \int_{\partial \mathcal{D}} \frac{dz}{f(z)},$$

wobei

$$f(z) = a + \frac{1}{2i}(z - z^{-1}) = a + \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}), \quad \text{für } z = e^{it} \in \partial \mathcal{D}.$$

Dann ist

$$I = \int_{\partial \mathcal{D}} \frac{2dz}{z^2 + 2iaz - 1}$$

und wir können den Rückstand-Satz verwenden um das Integral zu berechnen!!
Dieses zeigt folgendes:

Prinzip 11.5. *Es sei* $R(\cos t, \sin t)$ *eine rationale Funktion von* $\cos t$ *sowie* $\sin t$*. Dann mithilfe*

$$z = e^{it}$$

kann man das Integral

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt = \int_0^{2\pi} R(1/2(e^{it} + e^{-it}, 1/2(e^{it} - e^{-it}))\frac{ie^{it}}{ie^{it}}dt$$

$$= \int_{\partial\mathcal{D}} R(1/2(z + z^{-1}), 1/2(z - z^{-1}))\frac{dz}{iz} = \int_{\partial\mathcal{D}} \widetilde{R(z)}dz,$$

wobei $\widetilde{R(z)}$ *eine rationale Funktion ist und dementsprechend kann man das Integral mithilfe des Satzes berechnen!*

Als nächste, schauen wir was wir mit Integrals der Art

$$\int_0^\infty, \quad \int_{-\infty}^\infty$$

tun können.
Zum Beispiel berechnen wir

(1) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{1+x^4}dx$. (Box oder Regenbogen) Die Idee ist, man verwendet die Funktion

$$f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}.$$

Dann für $|z| >> R$ ist $|f(z)| \lessapprox |z|^{-2}$. Man integriert auf einem Weg Γ_R von $-R$ bis nach R auf $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, dan von R nach $R+iR$, dann wieder nach links bis zum $-R+iR$, und danach wieder runter. Laut dem Residue-Satz ist das Integral (für $R >> 0$) gleich $2\pi i$ mal die Summe den Residues innerhalb Γ_R. Die Integrals auf der Seiten des Boxes sowie oben kann man von oben von etwa R^{-1} abschatzen und dementsprechend konvergiert das Integral über Γ_R genau gegen

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{1+x^4}dx.$$

Dementsprechend ist das Integral gleich $2\pi i$ die Summe des Residues innerhalb Γ_R. Diese kann man wie im ersten Beispiel ausrechnen.

(2) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x \sin x}{a^2+x^2}dx$, $a > 0$. Die Idee hier ist den *imaginären Teil* eines Integrals zu berechnen. Mann kann wieder einen Weg wie Γ_R verwenden mit der Funktion

$$f(z) = \frac{ze^{iz}}{a^2+z^2}, \quad x \in \mathbb{R} \implies \Im f(x) = \frac{x \sin x}{a^2+x^2}.$$

Vorsicht: da

$$|e^{i(x+iy)}| = e^{-y},$$

damit wir das Integral auf der Seiten sowie oben des Boxes abschätzen können, müss die Höhe ungleich R sein. Wenn $z = R + iy$ für $R >> 0$ haben wir nur

$$|f(z)| \lessapprox \frac{R}{R^2} \sim R^{-1}.$$

Wenn die Höhe also $\sim \mathbb{R}$ wäre, da wir mit der Länge der Seite multiplizieren müssen um das Integral abzuschätzen, hätten wir kein ausrecheinde Abschätzung. Da aber die Funktion super klein wird wenn y gröss wird können wir die Höhe zB als $R^{1/2}$. Dann integriert man auf dem weg $-R$ nach R, dann hoch nach $R + i\sqrt{R}$, dann nach links und wieder runter. Dann konvergerien die Integrals auf der Seiten sowie oben gegen 0. Das Integral auf dem Box ist die Summe des Residues innerhalb (es gibt nur ein Pol innerhalb dem Box in $z = ia$ da $a > 0$. Laut dem Satz und der Konvergenz haben wir

$$\Im \int_{\Gamma_R} f(z)dz = \Im 2\pi i Res_{ia} f \to \Im \int_{-\infty}^\infty f(z)dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Im f(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{a^2 + x^2} dx.$$

12. Physikalische Verbindung zur Funktionentheorie

Funktionentheorie ist nicht nur mathematisch schön sondern auch wichtig für die Untersuchung der Physik. Durch die Wärmeleitungsgleichung (WLG) sowie die Wellengleichung können wir diese Verbindung sehen.

12.1. **Die Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}^n$.**

Die Herleitung der WLG folgt aus den Gesetzten der Thermodynamik und folgende Prinzip:

(1) Die Änderung der Energie durch Volumen ist proportionel zur Änderung des Temperaturs.
(2) Die Geschwindigkeit der Wärme durch eine Fläche ist proportionel zu dem Gradient der Funktion, die das Temperatur in einem Punkt ergibt.
(3) Angenommen es seien keine Quellen oder Klimaanlage gibt ist die Änderung der Energie komplett durch verlust der Wärme durch die Fläche.

Wenn man diese Gesetze sowie den Fundamentalsatz der Analysis verwendet dann wird das Ergebnis die WLG:

$$\partial_t u(x,t) = u_t = \partial_x^2 u(x,t) = u_{xx}(x,t),$$

wobei u das Temperatur im Punkt x sowie Zeitpunkt t ist und angenommen im Zeitpunkt 0 war

$$u(x,0) = u_0(x).$$

In höher Dimensionen (n) ist die WLG

$$u_t = \sum_{k=1}^{n} u_{x_k x_k} =: -\Delta u,$$

wobei Δ der Laplace-Operator ist.
Das heisst, man hitzt oder kühlt das Objekt und dadurch definiert $u_0(x)$ aber danach tut man *nichts* und schaut einfach wie das Temperatur des Objekts sich entwickelt. Die Funktion u (man kann zeigen, dass sie eindeutig ist) die die WLG sowie $u(x,0) = u_0(x)$ erfült ergibt genau das Temperatur im Zeitpunkt t im Raumpunkt x.
Wie kann man die WLG lösen? Mithilfe der *Fundamentallösung.*

Definition 12.1. Die Fundamentallösung der WLG auf $\mathbb{R}^n$ ist die eindeutige Funktion in $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ die erfült:

$$H(x,y,t) = H(y,x,t)$$

$$H(x,y,0) = \delta(x-y) = 1, \quad x = y, \text{ oder } 0, \quad x \neq y.$$

$$H_t = -\Delta_x H.$$

Die Funktion H verschwindet exponentiell schnell als x oder y gegen ∞.

So definiert ist die Lösung der WLG für $u_0(x)$ durch

$$u(x,t) := \int_{\mathbb{R}^n} H(x,y,t) u_0(y) dy$$

gegeben. Da das Integral so schön konvergiert kann man die Ableitungen ins Integral reinziehen und es gilt

$$u_t = \int H_t(x,y,t) u_0(y) dy = \int \Delta_x H(x,y,t) u_0(y) dy = \Delta u.$$

Ferner gilt

$$u(x,0) = \int \delta(x-y) u(y) dy = u_0(x).$$

In diesem Fall können wir H tatsächlich ausrechnen. Da $H(x,y,t) = H(y,x,t)$ ist H eine Funktion, die von $z = z(x,y) = z(y,x)$ abhängig. Da also $H(x,y,0) = \delta(x-y)$ ist also

$$z := x - y.$$

Wir haben die Gleichung

$$H_t = -\Delta_z H \implies \int e^{2\pi i z\cdot\xi} H_t(z,t)dz = -\int e^{2\pi i z\cdot\xi} \Delta H(z,t)dz.$$

Wir verwenden auf der rechten Seite partielle Integration

$$-\int e^{2\pi i z\cdot\xi} \Delta H(z,t)dz = \int \nabla e^{2\pi i z\cdot\xi} \cdot \nabla H(z,t)dz,$$

und lassen wir partielle Integration nochmal verwenden (es gibt nichts von dem ,,Rand" weil die Funktion H so schnell verschwindet als $|z| \to \infty$ laut Voraussetzungen).

$$-\int e^{2\pi i z\cdot\xi} \Delta H(z,t)dz = -\int \Delta e^{2\pi i z\cdot\xi} H(z,t)dz = 4\pi^2|\xi|^2 \int e^{2\pi i z\cdot\xi} H(z,t)dz.$$

Wir haben also die Gleichung

$$\partial_t \int e^{2\pi i z\cdot\xi} H(z,t)dz = \int e^{2\pi i z\cdot\xi} H_t(z,t)dz = 4\pi^2|\xi|^2 \int e^{2\pi i z\cdot\xi} H(z,t)dz.$$

Es sei

$$G(t) := \int e^{2\pi i z\cdot\xi} H(z,t)dz.$$

Dann haben wir eine Differentialgleichung für G und zwar

$$G'(t) = 4\pi^2|\xi|^2 G(t).$$

Diese Gleichung können wir lösen und die Lösung ist (bis auf Multiplikation mit Konstante die allerdings nur 1 sein können damit $H(z,0) = \delta(z)$)

$$G(t) = e^{4\pi^2|\xi|^2 t}.$$

Dementsprechend ist

$$\int e^{2\pi i z\cdot\xi} H(z,t)dz = e^{4\pi^2|\xi|^2 t}.$$

Kommt es Ihnen etwas bekannt vor? Dieses ist nun das Inversum des Fourier-Transforms. Betrachten wir auf beiden Seiten das Fourier-Transform und es ergibt

$$H(z,t) = \int e^{-2\pi i z\cdot\xi} e^{4\pi^2|\xi|^2 t} d\xi = (4\pi t)^{-n/2} e^{-|z|^2} 4t,$$

da laut den Übungsaufgabe MfP I ist das Fourier-Transform einer Funktion

$$e^{-\alpha\pi|\xi|^2}$$

die Funktion

$$\alpha^{-n/2} e^{-\pi|\xi|^2/\alpha},$$

und in unserem Fall ist $\alpha = 4\pi t$. Da $z = x - y$ ist die Fundamentallösung der WLG auf $\mathbb{R}^n$

$$H(x,y,t) = \frac{e^{-|x-y|^2/4t}}{(4\pi t)^{n/2}}.$$

Auch wenn Sie die WLG auf Mannigfaltigkeiten betrachten wollen hilft diese Lösung, da Wärmeleitung *lokal* ist und Mannigfaltigkeiten sind lokal diffeomorph zu $\mathbb{R}^n$. Dementsprechend ist die Wärmeleitung in einem kleinen Fenster auf einer Mfk in jeder kleinen Umgebung gut durch die Wärmeleitung auf einer kleinen Umgebung in $\mathbb{R}^n$ (Mfk Dimension n) gegeben.
Man sieht noch nicht so deutlich die Verbindung zur Funktionentheorie aber sie kommt noch.

12.2. **Die Gamma Funktion.**

Definition 12.2. Die Gamma Funktion
$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt, \quad \Re(s) > 0.$$

Proposition 12.3. *Die Gamma Funktion ist holomorph auf $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > 0\}$ und hat eine eindeutige meromorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C}$ mit Pole in $\{1-n : n \in \mathbb{N}\}$.*

Beweis: Partielle Integration zeigt

$$\Gamma(s+1) = \int_0^\infty t^s e^{-t}\mathrm{d}t = \left[-t^s e^{-t}\right] - \int_0^\infty -e^{-t}st^{s-1}dt = s \cdot \Gamma(s) \tag{12.1}$$

Da $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = 1$,
Wenn wir 12.1 für $s \in \mathbb{N}$ verwenden bekommen wir
$$\Gamma(k) = (k-1)! \quad \forall k \in \mathbb{N},$$
$$\Gamma(k+\frac{1}{2}) = (k-\frac{1}{2})(k-\frac{3}{2})\cdots\Gamma(\frac{1}{2}).$$
Für $\Re(s) \in (-1,0)$ ist die Funktion
$$\frac{\Gamma(s+1)}{s}$$
holomorph. Die Funktion ist ebenso holomorph für $\Re(s) = 0$ solange $s \neq 0$. Dementsprechend hat Γ eine eindeutige Fortsetzung auf der Streife
$$\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) \in (-1,0]\} \setminus \{0\}.$$
Da $\Gamma(s+1) \to \Gamma(1) = 1$ als $s \to 0$ hat die Gamma Funktion ein einfachen Pol in $s = 0$ mit Residue gleich 1. Wir können die Gamma Funktion noch weiter nach links fortsetzen durch Induktion. Es sei Γ definiert auf
$$\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) \in (-k, -k+1]\} \setminus \{-k+1\},$$
mit einem einfachen Pol in $s = -k+1$ und es gilt immer noch
$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s).$$
Dann ist die Funktion
$$\frac{\Gamma(s+1)}{s}$$
holomorph auf
$$\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) \in (-k-1, -k]\} \setminus \{-k\}.$$
Da $\Gamma(s+1) \to \Gamma(-k)$ als $k \to -k-1$ hat Γ noch einen einfachen Pol in $-k-1$.

□

Die Gamma Funktion hat viel mit der Physik sowie mit der Natur zu tun. Zum Beispiel ergibt sie das Volumens eines Balls in jeder Dimension.

Proposition 12.4. *Das Volumen (bzgl. Lebesgue Mass) des Balls*
$$B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$$
in $\mathbb{R}^n$ ist
$$w_n = Vol\,(B_1(0)) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n \cdot \Gamma(\frac{n}{2})}.$$
Das Ziel ist also zu berechnen
$$\int_{S_1(0)} \int_0^1 r^{n-1}\ dr\,d\sigma$$

Proof. Wir teilen Diese Aufgabe in 4 Schritten

(i) Zuerst vermuten wir, dass $\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|x|^2}dx = 1$. Laut Fubini-Tonelli ist $I_n = (I_1)^n$. Also gilt, $I_n = (I_2)^{\frac{n}{2}}$ und

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^{2\pi} e^{-\pi r^2} r \ \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi \cdot \int_0^{\infty} e^{-\pi r^2} r \ \mathrm{d}r \\
&= 2\pi \cdot \left[\left(\frac{e^{-\pi r^2}}{-2\pi}\right)\right]_0^{\infty} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow I_1 = \sqrt{I_2} = 1$ and $I_k = 1 \forall k \in \mathbb{N}$.

Question 1. *Was ist* $\Gamma(\frac{1}{2})$*?*

Laut der Definition ist

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}} e^{-t}\mathrm{d}t \tag{12.2}$$

Sei $s = t^{\frac{1}{2}}$, $\mathrm{d}s = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t$, $t = s^2$, $2\mathrm{d}s = t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t$. Dann ist $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int\limits_0^{\infty} e^{-s^2} 2\mathrm{d}s$. Ferner sei $u = \frac{s}{\sqrt{\pi}}$, $\sqrt{\pi}u = s$. Dann, 12.2 lasst sich vereinfachen

$$
\begin{aligned}
\Gamma(\frac{1}{2}) &= 2\int_0^{\infty} e^{-\pi u^2 \sqrt{\pi}}\mathrm{d}u \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi^2 u}\sqrt{\pi}\mathrm{d}u \\
&= \sqrt{\pi}I_1 = \sqrt{\pi}
\end{aligned}
$$

Dementsprechend ist $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

(ii) Jetzt betrachten wir σ_n, die Fläche bzgl. $n-1$-Dimensionale Lebesgue-Mass von $S_1(0) = \partial B_1(0)$. Wir wissen

$$1 = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|x|^2} \ dx = \int_{S_1(0)} \int_0^{\infty} e^{-\pi r^2} r^{n-1} \ \mathrm{d}r\mathrm{d}\sigma = \sigma_n \int_0^{\infty} e^{-\pi r^2} r^{n-1} \ \mathrm{d}r$$

Sei $s = r^2\pi$, dann gilt $\mathrm{d}s = 2r\pi dr$ und dementsprechend

$$1 = \frac{\sigma_n}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-s} \left(\frac{s}{\pi}\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{ds}{(\frac{s}{2\pi})^{\frac{1}{2}}}$$

Da $\frac{s}{\pi}^{\frac{1}{2}} = r$, $\frac{\mathrm{d}s}{2\pi r} = \ \mathrm{d}r$.
Jetzt haben wir

$$1 = \frac{\sigma_n}{2\pi \cdot \pi^{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}} \int_0^{\infty} e^{-s} s^{n/2-1}\mathrm{d}s = \frac{\sigma_n}{2\pi^{n/2}}\Gamma(\frac{n}{2})$$

$\Rightarrow \sigma_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$

(iii) In diesem Schritt betrachten wir w_n.

$$\int\limits_{B_1(0)} dx = \text{Vol }(B_1(0)) = \int\limits_{S_1(0)} \int\limits_0^1 r^{n-1} \, \mathrm{d}r\mathrm{d}\sigma = \sigma_n \int\limits_0^1 r^{n-1} \, \mathrm{d}r = \left[\sigma_n \frac{r^n}{n}\right]_0^1 = \frac{\sigma_n}{n} = w_n$$

Dementsprechend ist $w_n = \frac{2\pi^{n/2}}{n \cdot \Gamma(\frac{n}{2})}$, was dem Beweis zum Ende führt

$\square$

12.3. **Die Wellengleichung.** Auf einem beschränkten Gebiet in $\mathbb{R}^n$ kann man die Wellenausbreitung mithilfe der Wellengleichung beschreiben. Die Wellengleichung, die ebenso durch physikalische Gesetze hergeleitet werden kann ist

$$\partial_t^2 W(x,t) = -\Delta W(x,t).$$

Wenn man den Ansatz macht, dass die Funktion

$$W(x,t) = f(x)g(t)$$

dann ergibt die Wellengleichung (WG)

$$g''(t)f(x) = -\Delta f(x)g(t) \iff \frac{g''(t)}{g(t)} = -\frac{\Delta f(x)}{f(x)}.$$

Diese Gleichung kann nur gelten, wenn beide Seite konstant sind. Also ergibt die WG folgende Gleichung

$$\Delta f(x) = \lambda f(x).$$

Diese Gleichung nennt man die Laplace-Gleichung. Die Zahlen λ sodass es eine (nicht immer gleich 0) Funktion f gibt, die die Laplace-Gleichung erfült mit λ heissen *Eigenwerte.* Die Menge alle Eigenwerte heisst das *Spektrum.* Die Funktionen, die die Laplace-Gleichung erfülen heissen die *Eigenfunktionen.* Man kann beweisen Mithilfe der Funktionalanalysis in MfP I, dass die Eigenfunktionen eine orthogonale Basis eines Hilbertraums bauen. Dementsprechend weiss man, dass die Lösungen laut dem Ansatz *alle* Lösungen sind. Wir habe mit dem Ansatz also nichts verpasst. Sobald man die Lösungen f hat, dann kann man die Gleichung für g lösen, da es nur eine Differentialgleichung ist und die Lösungen kennt man schon. Angenommen fängt die Welle im Zeitpunkt $t = 0$ an, d.h. in dem Zeitpunkt ist alles still also ist $g(0) = 0$ und die Lösungen sind dementsprechend

$$g(t) = \sin(\sqrt{\lambda} t).$$

Mann kann beweisen, dass die Eigenwerte wenn man die Dirichlet-Randbedingung annimmt (d.h. der Rand bewegt sich nicht, wie ein Trommel oder die Randpunkte auf einer Saite eines Instruments, die fest gehalten sind!) so ein Verhältnis haben

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \to \infty.$$

Die bauen eine diskrete Folge $\{\lambda_k\}$ mit dem einzigen Haufungspunkt ∞. Weyl hat beweisen, dass für ein Gebiet in $\mathbb{R}^n$, $\lambda_k \sim k^{n/2}$ als $k \to \infty$.
Die Fundamentallösung der WLG in diesem Fall ist

$$H(x,y,t) = \sum_{k \geq 1} e^{-\lambda_k t} f_k(x) f_k(y),$$

wobei f_k erfülen

$$\Delta f_k = \lambda_k f_k, \quad \int f_k(x) f_j(x) dx = \delta(j-k).$$

Sie können einfach ausrechnen, dass diese Funktion die Gleichung erfült. Um zu sehen, dass $H(x,y,0)$ so definiert ist $\delta(x-y)$ ist gar nicht so einfach. Sie können dieses also einfach annehmen.

In der Physik ist es oft erwünscht, den Determinant eines Operators betrachten zu können. Für eine diagonale $n \times n$ Matrix M mit den Eigenwerte $\{\mu_j\}_{j=1}^n$ ist der Determinant

$$\prod_{j=1}^{n} \mu_j.$$

Der Laplace-Operator auf dem Hilbert-Raum mit der Basis $\{f_k\}$ ist ebenso eine diagonale $\infty \times \infty$ Matrix mit den Eigenwerte $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$. Allerdings ist

$$\prod_{k=1}^{\infty} \lambda_k = \infty.$$

Naja können wir mithilfe Funktionentheorie dieses trotzdem definieren. Es sei

$$\zeta_M(s) := \sum_{j=1}^{n} \mu_j^{-s}.$$

Dann ist

$$\zeta_M'(s) = \sum_{j=1}^{n} - \ln(\mu_j)\mu_j^{-s} \implies \zeta_M'(0) = -\sum_{j=1}^{n} \ln(\mu_j)$$

$$\implies e^{-\zeta_M'(0)} = \prod_{j=1}^{n} \mu_j = \det(M).$$

Definieren wir ebenso für den Laplace-Operator

$$\zeta_\Delta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-s}.$$

Proposition 12.5. *Es gilt*

$$\zeta_\Delta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} H(t) dt,$$

wobei

$$H(t) := \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t}$$

ist die Hitzespur.

Beweis: Zuerst merkt man, dass die Hitzespur ist genau die Spur (d.h. das Integral auf dem Diagonal) der Fundamentallösung der WLG. Die Proposition kann man mit Substitution und die Definitionen beweisen ist also als Aufgabe für den Leser gelassen. □

Betrachten wir einen Beispiel. Es sei unser Gebiet in $\mathbb{R}^1$ eine Saite mit der Länge π. Dann ist die Laplace-Gleichung

$$-f''(x) = \lambda f(x), \quad f(0) = f(\pi) = 0.$$

Die Lösungen sind

$$f_k(x) = \sin(kx), \quad \lambda = k^2.$$

Die dazugehörige ζ Funktion ist

$$\zeta(s) = \sum_{k \geq 1} k^{-2s} = \zeta_R(2s),$$

wobei

$$\zeta_R(s) = \sum_{k \geq 1} k^{-s}$$

die Riemann zeta Funktion ist. Diese Funktion ist holomorph, solange $\Re(s) > 1$. Wir können trotzdem $\zeta'(0)$ definieren. Wir zeigen nur diesen Sonderfall aber das Prinzip und das Method gilt auch für Gebiet in $\mathbb{R}^n$ allerdings kennt man die genaue Werte der λ_k, nur ihre asymptotische Verhältnis (was aber reicht).

Wir wissen laut der Proposition, dass

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \sum_{k=1}^\infty e^{-k^2 t} dt.$$

Da wir den Verhältnis zwischen ζ_R sowie ζ betrachtet haben, können wir ζ_R betrachten, weil es etwas einfacher ist.
Es gilt

$$\zeta_R(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \sum_{k=1}^\infty e^{-kt} dt.$$

Ein Grund dieses einfacher zu betrachten ist, ist dass wir die geometrische Reihe summieren können

$$\sum_{k\geq 1} e^{-kt} = \sum_{k\geq 1} (e^{-t})^k = \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}.$$

Betrachten wir diese Funktion für $t \in \mathbb{C}$ (nicht nur in $\mathbb{R}$) und wir sehen, dass diese Funktion holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist und sie hat einen Pol Grades 1 im Punkt 0 hat. Sie hat dementsprechend eine Laurent-Entwicklung die so aussieht

$$\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} = a_{-1} t^{-1} + f(t), \quad f(t) = \sum_{n \geq 0} a_n t^n,$$

und da die Funktion auf der linken Seite exponentiell schnell gegen 0 verschwindet als $t \to \infty$ müss die Funktion auf der rechten Seite ebenso schnell verschwinden. Dann ist das Integral

$$\int_0^\infty t^{s-1} \sum_{k=1}^\infty e^{-kt} dt$$

$$= \int_0^1 a_{-1} t^{s-2} + a_0 t^{s-1} + a_1 t^s dt + \int_0^1 \sum_{n\geq 2} a_n t^{s-1+n} dt + \int_1^\infty t^{s-1}(a_{-1} t^{-1} + f(t)) dt.$$

Die letzte zwei Integrals konvergieren absolut für $\Re(s) \geq -1$ also definieren sie Funktionen, die für $\Re(s) \geq -1$ holomorph sind. Das erste Integral können wir einfach ausrechnen

$$\int_0^1 a_{-1} t^{s-2} + a_0 t^{s-1} + a_1 t^s dt = \frac{a_{-1}}{s-1} + \frac{a_0}{s} + \frac{a_1}{s+1}.$$

Dementsprechend ist

$$\int_0^\infty t^{s-1} \sum_{k=1}^\infty e^{-kt} dt = \frac{a_{-1}}{s-1} + \frac{a_0}{s} + \frac{a_1}{s+1} + h(s), \quad h \text{ ist holomorph auf } \Re(s) \geq -1.$$

Diese Funktion hat einfache Pole (d.h. Grades 1) in $s = 1, 0, -1$. Allerdings hat $\Gamma(s)$ ein einfachen Pol in $s = 0$ also hat $1/\Gamma(s)$ eine einfache (d.h. Grades 1) Nullstelle in $s = 0$ und dementsprechend ist

$$\frac{1}{\Gamma(s)} \left(\frac{a_{-1}}{s-1} + \frac{a_0}{s} + \frac{a_1}{s+1} + h(s) \right)$$

holomorph in $s = 0$. Wir können also $\zeta_R'(0)$ definieren! Dann gilt laut der Kettenregel

$$\zeta'(0) = \zeta_R'(2s)|_{s=0} = 2\zeta_R'(0).$$

Allgemeiner für ein Gebiet hat die Hitzespur $H(t) = \sum_{k\geq 1} e^{-\lambda_k t}$ eine Laurent-Entwicklung als $t \downarrow 0$ und man kann auch im allgemeinen Fall $\zeta'(0)$ definieren - die Idee ist genau das gleiche wie in diesem Beispiel.
Einige witzige Bemerkungen

$$\prod_{k\geq 1} k \text{``}=\text{''}\, e^{-\zeta_R'(0)} = e^{1/2 \ln(2\pi)} = \sqrt{2\pi}.$$

$$\sum_{k\geq 1} k \text{``}=\text{''}\, \zeta(1) = \infty,$$

weil ζ einen Pol in $s = 1$ hat. Allerdings da ζ keinen Pol in 0 hat ist

$$1 + 1 + \ldots \text{“} ='' \zeta(0) = -\frac{1}{2}.$$

References

[1] W. Fischer and I. Lieb, *A Course in Complex Analysis,* Vieweg+Teubner Verlag, Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH (2012).
[2] L. Hörmander, *An introduction to Complex Analysis in Several Variables,* Third Edition, Elsevier, (2000).