Lösning till problemet april 1998

Triangelolikheten och olikheten mellan aritmetiskt och geometriskt medium ger

$$\begin{aligned}3\sin^5 x\cos y+4\sin^3 y\cos^3 x &\leq |3\sin^5 x\cos y+4\sin^3 y\cos^3 x|\\ &\leq 3|\sin^5 x||\cos y|+4|\sin^3 y||\cos^3 x|\\ &\leq \frac{3}{2}(\sin^{10} x+\cos^2 y)+2(\sin^6 y+\cos^6 x)\\ &\leq \frac{3}{2}\sin^2 x+2\cos^6 x+\frac{3}{2}\cos^2 y+2\sin^6 y.\end{aligned}$$

Sätt $f(t)=\frac{3t}{2}+2(1-t)^3$, för $0\leq t\leq 1$. Nu är, för $0\leq t\leq 1$,

$$f(t)=2-2t\left(t-\frac{3}{2}\right)^2\leq 2,$$

med likhet då och endast då $t=0$. Men då är $\frac{3}{2}\sin^2 x+2\cos^6 x=f(\sin^2 x)\leq 2$ med likhet då och endast då $\sin^2 x=0$ och $\frac{3}{2}\cos^2 y+2\sin^6 y=f(\cos^2 y)\leq 2$ med likhet då och endast då $\cos^2 y=0$. Alltså gäller olikheten $3\sin^5 x\cos y+4\sin^3 y\cos^3 x\leq 4$. Om $\sin x=\cos y=0$ reduceras olikheten till $4\sin^3 y\cos^3 x\leq 4$ där likhet inträffar om och endast om $\sin y\cos x=1$.

Svar: Likhet inträffar om och endast om $\sin y\cos x=1$