Lösning till problemet augusti 1998

Om $a^2b + a + b$ är delbart med $ab^2 + b + 7$ så är $a(ab^2 + b + 7) - b(a^2 + b + 7) = 7a - b^2$ delbart med $ab^2 + b + 7$. Detta ger att $7a - b^2 = 0$ eller $0 < ab^2 + b + 7 \leq |7a - b^2|$.

Om $7a = b^2$ så är primtalet 7 en delare i b^2 varav följer att b är en multipel av 7. Insättning av $b = 7k$ ger då $a = 7k^2$. För $a = 7k^2$ och $b = 7k$ är $a^2b + a + b = k(7^3k^4 + 7k + 7) = k(ab^2 + b + 7)$ som visar att $(a, b) = 7(k^2, k)$, $k = 1, 2, \ldots$ är lösningar.

Om $7a - b^2 > 0$ gäller $7a > 7a - b^2 \geq ab^2 + b + 7 > ab^2$ dvs. $b^2 < 7$. Möjliga väden för b är alltså $b = 1$ och $b = 2$.

- Om $b = 1$ är $7a - 1 = 7(a + 8) - 57$ delbart med $ab^2 + b + 7 = a + 8$ om och endast om $57 = 1 \cdot 3 \cdot 19$ är delbart med $a + 8$. Alltså är $a + 8$ lika med 1, 3, 19 eller 57. De två första alternativen ger negativa värden på a. De återstående två alternativen ger $a = 11$ respektive $a = 49$. Kontroll visar att $(11, 1)$ och $(49, 1)$ är lösningar.

- Om $b = 2$ är $ab^2 + b + 7 = 4a + 9$ udda och $4(7a - 4) = 7(4a + 9) - 91$ delbart med $ab^2 + b + 7 = 4a + 9$ om och endast om 91 är delbart med $4a + 9$. Då 91 är ett primtal gäller $4a + 9 = 1$ eller $4a + 9 = 91$. Det första altenativet ger $a = -2 < 0$ medan det andra fallet saknar heltalslösning.

Om $7a - b^2 < 0$ gäller $b^2 < ab^2 + b + 7 \leq b^2 - 7a < b^2$ vilket är omöjligt.

Svar: $(11, 1)$, $(49, 1)$ och $(7k^2, 7k)$, $k = 1, 2, \ldots$