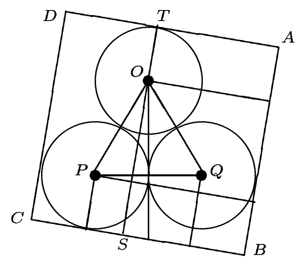
Lösning till problemet februari 1998

Låt de tre cirklarna ha medelpunkter O, P och R och låt $ABCD$ vara rektangeln omskriven kring de tre cirklarna så att den spetsiga vinkeln mellan sidan BC och linjen PQ är α. Antag vidare att sidan AD tangerar i punkten T. Låt S vara skärningspunkten mellan BC och linjen OT.



Vinkeln $\angle POS = |30^\circ - \alpha|$ och ortogonala projektionen av $|OP|$ på sidan AB har längden $2\cos(30^\circ - \alpha)$. Alltså är $|AB| = 2 + 2\cos(30^\circ - \alpha)$. Analoga räkningar ger $|BC| = 2 + 2\cos\alpha$. Minsta kvadrat med sidor parallella med sidorna i rektangeln $ABCD$ har alltså sidan

$$s(\alpha) = \max\{2 + 2\cos(30^\circ - \alpha),\ 2 + 2\cos\alpha\}.$$

Av symmetriskäl räcker det att betrakta $0 \leq \alpha \leq 30^\circ$. Då är $\cos\alpha \geq \cos(30^\circ - \alpha)$ om och endast om $\alpha \leq 30^\circ - \alpha$ och alltså

$$s(\alpha) = \begin{cases} 2 + 2\cos\alpha & \text{om } \ 0^\circ \leq \alpha \leq 15^\circ \\ 2 + 2\cos(30^\circ - \alpha) & \text{om } \ 15^\circ \leq \alpha \leq 30^\circ \end{cases}$$

Funktionen s avtar från 4 till $2 + 2\cos 15^\circ$ då α växer från 0° till 15°, för att sedan växa från detta värde till 4 då α växer till 30°.
Nu är $\sqrt{3}/2 = \cos 30^\circ = 2\cos^2 15^\circ - 1$ som ger

$$2\cos 15^\circ = \sqrt{\sqrt{3} + 2} = \frac{1}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2}).$$

Svar: Minsta kvadraten har sidan $2 + \dfrac{1}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ cm.