Lösning till problemet januari 1998

Binomialkomplettering ger

$$p(n) = n^3 - 18n^2 + 115n - 391 = (n-6)^3 + 7(n-25),$$

som visar att p är växande. Då $p(10) = -41$ kan $p(n)$ inte vara kuben på ett postivt heltal om $n \leq 10$. Nu är $p(11) = 27 = 3^3$ och $p(12) = 125 = 5^3$. För $12 < n < 25$ är $(n-7)^3 < p(n) < (n-6)^3$ (vänstra olikheten är ekvivalent med $(3n+4)(n-12) > 0$, högra uppenbar). Då kan inte $p(n)$ vara kuben på ett positivt heltal om $12 < n < 25$. För $n = 25$ är $p(25) = 19^3$. Slutligen, om $n > 25$ så är $(n-6)^3 < p(n) < (n-5)^3$. Här är den vänstra olikheten uppenbar. Den högra kan man visa så här:

$$\begin{aligned} n \geq 8 \quad &\Rightarrow \quad 4(n-6) < 3(n-6)^2 \\ &\Rightarrow \quad p(n) = (n-6)^3 + 7(n-25) \\ &< \quad (n-6)^3 + 4(n-6) + 3(n-6) \\ &< \quad (n-6)^3 + 3(n-6)^2 + 3(n-6) + 1 = (n-5)^3. \end{aligned}$$

Det finns inget $n > 25$ sådant att $p(n)$ är kuben på ett positivt heltal.

Svar: $n = 11$, 12 och 25.