Lösning till problemet maj 1998

a) Sätt $S_k = \sum_{j=1}^{k} x_j$. Då är $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Om S_n är delbart med n måste $\frac{n+1}{2}$ vara ett heltal, $n = 2q-1$ är udda och $S_{2q-1} = q(2q-1)$.
Om $q = 1$ är $n = 1$ och följden $x_1 = 1$ löser problemet.
Om $q \geq 2$ är

$$S_{2q-2} = S_{2q-1} - x_{2q-1} = q(2q-1) - x_{2q-1} = q(2q-2) + q - x_{2q-1},$$

som är delbart med $2q-2$ om och endast om $x_{2q-1} - q$ är delbart med $2q-2$.
Nu är $-(q-1) \leq x_{2q-1} - q \leq q-1$. Alltså är $x_{2q-1} = q$ och $S_{2q-2} = q(2q-2)$.
Om $q = 2$ är $n = 3$ och följden $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ och $x_3 = 2$ löser problemet.
Om $q \geq 3$ är

$$S_{2q-3} = S_{2q-2} - x_{2q-2} = q(2q-2) - x_{2q-2} = q(2q-3) + q - x_{2q-2},$$

som är delbart med $2q-3$ om och endast om $x_{2q-2} - q$ är delbart med $2q-3$.
Nu är $-(q-1) \leq x_{2q-2} - q \leq q-1$ varav $x_{2q-2} = q = x_{2q-1}$ i strid mot att följdens element skulle vara olika. För $n \geq 3$ saknas alltså lösning.

b) Antag att $n = 2q-1$ är ett udda positivt heltal och att följden $x_1, x_2, \ldots, x_{2q-1}$ av olika positiva heltal har egenskapen att k delar summan $S_k = \sum_{j=1}^{k} x_j$ för $k = 1, 2, \ldots, 2q-1$. Antag att x och y har egenskapen att $2q$ delar $S_{2q-1} + x$ och $2q+1$ delar $S_{2q-1} + x + y$. Då finns heltal λ så att $S_{2q-1} + x + y = \lambda(2q+1)$ eller $\lambda - y = S_{2q-1} + x - 2\lambda q$, vilket visar att $\lambda - y = 2\mu q$ för något heltal μ. Detta ger $S_{2q-1} + x + y = (y + \mu 2q)(2q+1)$. Omvänt om x och y löser denna diofantiska ekvation så gäller att $2q+1$ delar $S_{2q-1} + x + y$ och $2q$ delar $S_{2q-1} + x = y2q + \mu 2q(2q+1)$. Om man nu väljer x_{2q+1} som det minsta positiva heltal som inte förekommer i följden $x_1, x_2, \ldots, x_{2q-1}$ och $x_{2q} = S_{2q-1}(2q(2q+1) - 1) + 2qx_{2q+1}$ så är $x_{2q} > x_k$ för $k \neq 2q$ och $1 \leq k \leq 2q+1$. Den ursprungliga följden har alltså utökats med två nya element x_{2q} och x_{2q+1} sådana att k delar S_k för $1 \leq k \leq 2q+1$. Den rekursivt definierade följden

$$x_1 = 1,\ x_{2n+1} = \min(Z^+ \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1}\}),\ x_{2n} = 2nx_{2n+1} + (2n(2n+1) - 1) \sum_{j=1}^{2n-1} x_j$$

uppfyller då de angivna villkoren, ty alla elementen är olika och följden $x_1, x_2, \ldots, x_{2q-1}$ innehåller alla heltal $1, 2, \ldots, q$.

En alternativ lösning är att låta $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.618\ldots$ (gyllene snittet ϕ uppfyller $\phi = \frac{1}{\phi} + 1$), och definiera följden $x_1, x_2, x_3, \ldots$ genom

$$x_n = n \cdot \left[\frac{n}{\phi}\right] - (n-1) \cdot \left[\frac{n-1}{\phi}\right] + 1, \qquad \text{för alla} \qquad n \in Z^+.$$

Denna formel kan man ledas till om man studerar den följd man får genom att sätta $x_1 = 1$ och sedan rekursivt definierar $x_n =$ ”det minsta ännu ej valda positiva heltal som är sådant att $S_n = \sum_{j=1}^{n} x_n$ är delbart med n”:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
x_n	1	3	2	6	8	4	11	5	14	16	7	19	21	
S_n	1	4	6	12	20	24	35	40	54	70	77	96	117	$\dots$
S_n/n	1	2	2	3	4	4	5	5	6	7	7	8	9	

Tabellen innehåller även talen $S_n = \sum_{j=1}^{n} x_j$ och S_n/n, som definitionsmässigt är heltal. Observera nu att följden S_n/n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ tycks ”öka med jämn hastighet”, ”medelökningen” per steg är $\approx 8/13 \approx \frac{1}{\phi}$. Man kan därför *gissa* att $S_n/n = \left[\frac{n}{\phi}\right] + 1$ för alla $n \geq 1$. Ur $x_n = S_n - S_{n-1}$ får vi då formeln ovan.

Vi ska nu visa att denna talföljd uppfyller alla krav. För alla $k \in Z^+$ blir

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = k \cdot \left[\frac{k}{\phi}\right] - 0 \cdot \left[\frac{0}{\phi}\right] + (1 + 1 + \cdots + 1) = k \cdot \left[\frac{k}{\phi}\right] + k,$$

vilket är delbart med k. Det återstår nu att visa att talföljden innehåller varje positivt heltal precis en gång. Vi visar detta genom att bevisa att $x(x(n)) = n$ för alla $n \in Z^+$ (av typografiska skäl skriver vi $x(n)$ istället för x_n). Härur följer att varje positivt heltal m förekommer i talföljden – nämligen som det $x(m)$:te talet i talföljden – och att det inte kan förekomma mer än en gång i talföljden, ty om $x(n) = m$ så måste $x(x(n)) = x(m)$, dvs. $n = x(m)$.

Bevis för $x(x(n)) = n$

Definiera $r(n)$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$ som decimaldelen av $\frac{n}{\phi}$, dvs. $\frac{n}{\phi} = \left[\frac{n}{\phi}\right] + r(n),\ 0 \leq r(n) < 1$. Då är $\frac{n-1}{\phi} = \left[\frac{n}{\phi}\right] + \left(r(n) - \frac{1}{\phi}\right)$, och $0 < \frac{1}{\phi} < 1$, så $\left[\frac{n-1}{\phi}\right] = \left[\frac{n}{\phi}\right]$ om $r(n) \geq \frac{1}{\phi}$, annars är $\left[\frac{n-1}{\phi}\right] = \left[\frac{n}{\phi}\right] - 1$. Insättning av detta i definitionen av $x_n = x(n)$ ger

$$x(n) = \begin{cases} \left[\frac{n}{\phi}\right] + 1 & \text{om} \quad r(n) \geq \frac{1}{\phi} \\ \left[\frac{n}{\phi}\right] + n & \text{om} \quad r(n) < \frac{1}{\phi} \end{cases}.$$

Observera att $x(1) = 1$, så $x(x(1)) = 1$. Tag nu $n \geq 2$. Då är $r(n) \neq \frac{1}{\phi}$, ty annars skulle $\frac{n}{\phi} = \left[\frac{n}{\phi}\right] + \frac{1}{\phi}$, dvs. $\frac{1}{\phi} = \left[\frac{n}{\phi}\right] / (n-1)$, i strid mot att talet $\frac{1}{\phi} = \phi - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ är irrationellt.

Fall 1: $r(n) < \frac{1}{\phi}$

Då är

$$\frac{x(n)}{\phi} = \frac{1}{\phi}\left(\frac{n}{\phi} - r(n) + n\right) = n - \frac{r(n)}{\phi} = n - 1 + \left(1 - \frac{r(n)}{\phi}\right).$$

Här är $n-1$ ett heltal, och $\left(1 - \frac{r(n)}{\phi}\right) < 1$, $\left(1 - \frac{r(n)}{\phi}\right) > 1 - \frac{1}{\phi^2} = \frac{1}{\phi}$, vilket ger $\left[\frac{x(n)}{\phi}\right] = n - 1$, och $r(x(n)) = 1 - \frac{r(n)}{\phi} > \frac{1}{\phi}$ varav

$$x(x(n)) = \left[\frac{x(n)}{\phi}\right] + 1 = n - 1 + 1 = n.$$

Fall 2: $r(n) > \frac{1}{\phi}$

Då är

$$\begin{aligned}\frac{x(n)}{\phi} &= \phi \cdot x(n) - x(n) = \phi \cdot \left(\frac{n}{\phi} - r(n) + 1\right) - x(n)\\ &= n - x(n) + \phi \cdot (1 - r(n)).\end{aligned}$$

Här är $n - x(n)$ ett heltal, och $\phi \cdot (1 - r(n)) > 0,\ \phi \cdot (1 - r(n)) < \phi \cdot \left(1 - \frac{1}{\phi}\right) = \frac{1}{\phi}$, som ger $\left[\frac{x(n)}{\phi}\right] = n - x(n)$, och $r(x(n)) = \phi \cdot (1 - r(n)) < \frac{1}{\phi}$ varav

$$x(x(n)) = \left[\frac{x(n)}{\phi}\right] + x(n) = (n - x(n)) + x(n) = n.$$

Svar: a) för $n = 1$ och $n = 3$ b) ja