Lösning till problemet mars 1998

För $n = 0$ är båda led lika med 0 och likhet råder. Antag nu att $2^N \leq n < 2^{N+1}$. Då har n framställningen

$$n = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon_j 2^j, \quad \varepsilon_j \in \{0, 1\}$$

i bas 2 och då $\dfrac{n}{2^k} + \dfrac{1}{2} < 1$ för $k > N + 1$ kan högra ledet i den likhet som ska visas skrivas $\displaystyle\sum_{k=1}^{N+1} \left[\frac{n}{2^k} + \frac{1}{2}\right]$.
Nu är för $1 \leq k \leq N + 1$

$$\frac{n}{2^k} + \frac{1}{2} = \sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_j 2^{j-k} + \sum_{j=k}^{N} \varepsilon_j 2^{j-k} + \frac{1}{2}.$$

Om $k = 1$ är $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_j 2^{j-k} = \frac{\varepsilon_0}{2}$. Om $k > 1$ är

$$\sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_j 2^{j-k} = \frac{\varepsilon_{k-1}}{2} + \sum_{j=0}^{k-2} \varepsilon_j 2^{j-k}$$

där $0 \leq \displaystyle\sum_{j=0}^{k-2} \varepsilon_j 2^{j-k} < \frac{1}{2}$. Genom att skilja på fallen $\varepsilon_{k-1} = 0$ respektive $\varepsilon_{k-1} = 1$ ger detta

$$\left[\frac{n}{2^k} + \frac{1}{2}\right] = \varepsilon_{k-1} + \sum_{j=k}^{N} \varepsilon_j 2^{j-k}, \qquad \text{för} \quad 1 \leq k \leq N.$$

För $k = N + 1$ är $\left[\dfrac{n}{2^k} + \dfrac{1}{2}\right] = \varepsilon_N$. Men då är

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N+1} \left[\frac{n}{2^k} + \frac{1}{2}\right] &= \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=k}^{N} \varepsilon_j 2^{j-k} + \sum_{k=1}^{N+1} \varepsilon_{k-1} \\
&= \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j 2^j \sum_{k=1}^{j} 2^{-k} + \sum_{k=0}^{N} \varepsilon_k \\
&= \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j 2^j (1 - 2^{-j}) + \sum_{k=0}^{N} \varepsilon_k \\
&= \sum_{j=0}^{N} \varepsilon_j 2^j = n.
\end{aligned}$$

Beviset kan också göras med kombinatorik. Låt $M = \{1, 2, \ldots, n\}$. Då är M unionen av de disjunkta mängderna M_k bestående av de tal i M som är delbara med 2^{k-1} men inte med 2^k. Ett element m tillhör M_k om och endast om $m = 2^{k-1}(2j - 1) \leq n$ med $j \geq 1$. Detta ger för $2^{k-1} \leq n$ olikheten $1 \leq j \leq \dfrac{n}{2^k} + \dfrac{1}{2}$ och antalet element i M_k är $\left[\dfrac{n}{2^k} + \dfrac{1}{2}\right]$. För $2^{k-1} > n$ är mängderna M_k tomma. Alltså är

$$n = \left[\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right] + \left[\frac{n}{4} + \frac{1}{2}\right] + \left[\frac{n}{8} + \frac{1}{2}\right] + \cdots$$