Lösning till problemet oktober 1998

Antag att $N_k = a_k 10^{299} + a_{k+1}10^{298} + \cdots + a_{300}10^{k-1} + a_1 10^{k-2} + \cdots + a_{k-1}$ är delbart med 13. Nu är

$$\begin{aligned} 10^{301-k}N_k &= a_1 10^{299} + \cdots + a_{k-1}10^{301-k} + 10^{300}(a_k 10^{300-k} + a_{k+1}10^{299-k} + \cdots + a_{300}) \\ &= a_1 10^{299} + \cdots + a_{300} + (10^{300} - 1)(a_k 10^{300-k} + a_{k+1}10^{299-k} + \cdots + a_{300}) \\ &= N_1 + (10^{300} - 1)(a_k 10^{300-k} + a_{k+1}10^{299-k} + \cdots + a_{300}) \end{aligned}$$

Nu är

$$10^{300} \equiv 100^{150} \equiv 9^{150} \equiv 81^{75} \equiv 3^{75} \equiv 27^{25} \equiv 1^{25} \equiv 1 \pmod{13},$$

och alltså är $10^{300} - 1$ alltid delbart med 13. Om då N_k är delbart med 13 så är N_1 också delbart med 13. Av relationen

$$10^{301-m}N_m = N_1 + (10^{300} - 1)(a_m 10^{300-m} + a_{m+1}10^{299-m} + \cdots + a_{300})$$

följer så att N_m är delbart med 13 för alla m med $1 \leq m \leq 300$.