Lösning till problem April 1999

Antag först att talet n inte tillhör mängden.
Då ligger de $2n$ talen $a_1, a_2, \ldots, a_n, 2n - a_1, 2n - a_2, \ldots, 2n - a_n$ i intervallet $(0, 2n)$. Två av talen måste vara lika: $a_i = 2n - a_j$' dár $i \neq j$ efterson n enligt antagandet inte finns i mängden. Alltså är $a_i + a_j$ delbart med $2n$,
Antag nu att $a_n = n$. Betrakta talen $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Det måste finnas två bland dessa tal vars differens ej är delbar med n, ty annars skulle det finnas tre tal $a_i < a_j < a_k$ sådana att $a_j - a_i \geq n$ och $a_k - a_j \geq n$, varav $a_k - a_i \geq 2n$, vilket motsäger att talen ligger i det öppna intervallet $(0, 2n)$.
Antag att a_1 och a_2 är två tal vars differens inte är delbar med n. Betrakta nu de n talen

$$a_1, a_2, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \ldots, a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}.$$

Om talen ligger i olika restklasser modulo n måste någon av summorna vara delbar med n. Om två av talen ligger i samma restklass måste deras differens vara delbar med n. Eftersom $a_2 - a_1$ inte är delbart med n kan en sådan differens d skrivas som en summa av tal a_i med $i \leq n - 1$. Om $d = kn$ och k är jämn är summan delbar med $2n$. Om k är udda är summan utökad med $a_n = n$ delbar med $2n$.
Villkoret att $n \geq 4$ är nödvändigt. Betrakta exempelvis $\{1, 3, 4\} \subset (0, 6)$.