

Lösning till problem december 1999

Enligt triangelolikheten gäller

$$(b - a + c)(b - a)^2 + (c - b + a)(c - b)^2 + (a - c + b)(a - c)^2 \geq 0$$

med likhet då och endast då $a = b = c$. Utveckling av vänsterledet i denna olikhet ger

$$4a^2b - 2ab^2 + 4b^2c - 2bc^2 + 4c^2a - 2ca^2 - 6abc \geq 0$$

eller

$$2((2a - b)ab + (2b - c)bc + (2c - a)ca - 3abc) \geq 0,$$

som efter division med $2abc$ ger den efterfrågade olikheten.

Svar: Likhet gäller då och endast då triangeln är likformig.