Lösning till problem: Februari 1999

Låt triangelns sidor ha längderna $n-1$, n och $n+1$. Enligt triangelolikheten är då $n+n+1 > n-1$, dvs $n > 2$. Låt α vara vinkeln som står mot sidan med längden n. Då ger cosinus- och areasatsen

$$\begin{aligned} 2(n^2-1)\cos\alpha &= (n+1)^2 + (n-1)^2 - n^2 = n^2+2 \\ 2(n^2-1)\sin\alpha &= 4T. \end{aligned}$$

Elimination av α (med trigonometriska ettan) ger efter förenkling $16T^2 = 3n^2(n^2-4)$ ett resultat som man också får ur Herons formel. Om nu T är ett heltal måste n vara jämnt och vi kan ersätta n med $2k$. Detta ger $T^2 = 3k^2(k^2-1)$. Då är T delbart med 3 och T^2 måste innehålla ett jämnt antal faktorer 3. Alltså måste k^2-1 vara delbart med 3. Dessutom måste $\dfrac{k^2-1}{3}$ vara en jämn kvadrat. Sätt $k^2 = 1+3m^2$. Då är $T = 3km$ ett heltal. Sidorna i triangeln är då $2k-1, 2k, 2k+1$ för alla positiva heltalslösningar till $k^2 = 1+3m^2$.
De första fyra heltalslösningarna ger

m	k	sidor
1	2	3,4,5
4	7	13,14,15
15	26	51,52,53
56	97	193,194,195

Svar: Sidorna är $2k-1$, $2k$ och $2k+1$ och arean $3km$ för alla positiva lösningar till den diofantiska ekvationen $k^2 = 1+3m^2$