Lösning till problem: Januari 1999

Sätt $m = \nu + 1$ och $n = \nu - 1$. Då får man $f(\nu) = f\left(\frac{m+n}{2}\right) < \frac{1}{2}(f(\nu+1) + f(\nu-1))$ eller (då funktionsvärdena är heltal) $f(\nu+1) - f(\nu) \geq f(\nu) - f(\nu-1) + 1$, för $\nu = 1, 2, \cdots$.
Låt m vara det minsta icke-negativa heltalet sådant att $f(m+1) - f(m) \geq 0$. Om $m > 0$ är

$$\begin{aligned}
f(m) - f(m-1) &\leq -1 \\
f(m-1) - f(m-2) &\leq f(m) - f(m-1) - 1 \leq -2 \\
f(m-2) - f(m-3) &\leq f(m-1) - f(m-2) - 1 \leq -3 \\
&\vdots \\
f(1) - f(0) &\leq f(2) - f(1) - 1 \leq -m.
\end{aligned}$$

Summeras dessa olikheter får man $f(m) - f(0) \leq -\frac{m(m+1)}{2}$ dvs $f(0) \geq \frac{m(m+1)}{2} + f(m) \geq \frac{m(m+1)}{2}$, en olikhet som också gäller om $m = 0$. Analogt är, om $m + 1 < k$,

$$\begin{aligned}
f(m+2) - f(m+1) &\geq 1 \\
f(m+3) - f(m+2) &\geq f(m+2) - f(m+1) + 1 \geq 2 \\
f(m+4) - f(m+3) &\geq f(m+3) - f(m+2) + 1 \geq 3 \\
&\vdots \\
f(k+1) - f(k) &\geq f(k) - f(k-1) + 1 \geq k - m,
\end{aligned}$$

som summerat ger $f(k+1) - f(m+1) \geq \frac{(1+k-m)(k-m)}{2}$ varav $f(k+1) \geq \frac{(k-m)(k-m+1)}{2} + f(m+1) \geq \frac{(k-m)(k-m+1)}{2}$, giltig även då $k = m$.
Om nu $m \geq \frac{k}{2}$ så är $f(0) \geq \frac{k(k+\frac{1}{2})}{8} \geq \frac{k^2}{8}$, om $m < \frac{k}{2} < k+1$ så är $k - m > \frac{k}{2}$ och $f(k+1) > \frac{k^2}{8}$.
Svar: Maximun av f på intervallet $[0, k+1]$ är minst $\frac{1}{8}k^2$.