Lösning till problem Juli 1999

Den givna implikationen

$$b - a > 0 \Rightarrow a^3 - 3a \leq b^3 - 3b + 4$$

är ekvivalent med

$$b - a > 0 \Rightarrow (a+1)^2(a-2) \leq (b-1)^2(b+2)$$

eller med $a = x - 1$ och $b = y + 1$,

$$y - x > -2 \Rightarrow x^2(x-3) \leq y^2(y+3)$$

dvs

$$y - x > -2 \Rightarrow y^3 - x^3 + 3(y^2 + x^2) \geq 0$$

eller

$$y - x > -2 \Rightarrow (y-x)(y^2 + x^2 + xy) + 3(y^2 + x^2) \geq 0.$$

Då $y^2 + x^2 + xy \geq 0$, med likhet om och endast om $x = y = 0$, är den sista olikheten ekvivalent med

$$y - x > -2 \Rightarrow -2(y^2 + x^2 + xy) + 3(y^2 + x^2) \geq 0, \text{ likhet om och endast om } x = y = 0,$$

eller

$$y - x > -2 \Rightarrow (y-x)^2 \geq 0.$$

Svar: Likhet om och endast om $a = -1$ och $b = 1$.