Lösning till problem Mars 1999

Sätt $p = 2k\pi$, där k är ett heltal. Då är

$$\begin{aligned}
|f(x+p) - f(x)| &= |\sin \pi(x+p) - \sin \pi x| \\
&= 2\left|\sin \frac{\pi p}{2} \cos\left(\pi x + \frac{\pi p}{2}\right)\right| \\
&\leq 2|\sin k\pi^2| \\
&= 2|\sin k\pi^2 - \sin n\pi| \\
&= 2\left|\sin \frac{k\pi - n}{2}\pi \cos \frac{k\pi + n}{2}\pi\right| \\
&\leq 2\left|\sin \frac{k\pi - n}{2}\pi\right| \\
&\leq |k\pi - n|\pi
\end{aligned}$$

där n är ett heltal. Det gäller att visa att det finns godtyckligt stora heltal k till vilka man kan finna heltal n sådant att $|k\pi - n| < \dfrac{d}{\pi}$.

Låt N vara ett positivt heltal med $\dfrac{1}{N} < \dfrac{d}{\pi}$. Låt I_j, för $j = 1, 2, \cdots, N$, vara intervallet $\dfrac{j-1}{N} \leq x < \dfrac{j}{N}$. Sätt $\{k\pi\} = k\pi - [k\pi]$. För varje heltal k är då $\{k\pi\} \in I_j$ för något j. Låt k_0 vara ett godtyckligt positivt heltal. Då måste två av de $N+1$ talen $0, \{k_0\pi\}, \{2k_0\pi\}, \{3k_0\pi\}, \cdots, \{Nk_0\pi\}$ tillhöra samma intervall I_j. Det finns alltså heltal a och b med $0 \leq a < b \leq N$ och ett heltal $j \in \{1, 2, \cdots, N\}$ så att

$$\frac{j-1}{N} \leq bk_0\pi - [bk_0\pi] < \frac{j}{N}$$

och

$$\frac{j-1}{N} \leq ak_0\pi - [ak_0\pi] < \frac{j}{N}.$$

Subtraktion ger

$$-\frac{1}{N} \leq (b-a)k_0\pi - ([bk_0\pi] - [ak_0\pi]) < \frac{1}{N}.$$

Sätt $n = [bk_0\pi] - [ak_0\pi]$. Då är

$$|(b-a)k_0\pi - n| \leq \frac{1}{N} < \frac{d}{\pi} \text{ och } (b-a)k_0 \geq k_0$$

och vi kan välja $k = (b-a)k_0$ och $p = 2k\pi = 2(b-a)k_0\pi$.