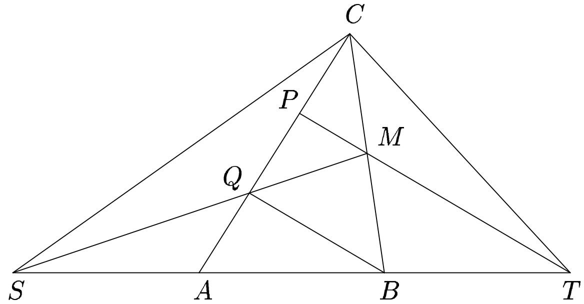
Lösning till problem november 1999

Sätt $\mathbf{a} = \overrightarrow{CA}$ och $\mathbf{b} = \overrightarrow{CB}$. Då blir $\overrightarrow{BA} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\mathbf{b}$ och $\overrightarrow{MQ} = \frac{2}{3}\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b}$.



Nu finns reella tal s och t så att

$$\mathbf{a} + t(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \overrightarrow{CA} + t\,\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CS} = \overrightarrow{CM} + s\,\overrightarrow{QM} = \frac{1}{2}\mathbf{b} + s\left(\frac{2}{3}\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b}\right),$$

som ger

$$\left(1 + t - \frac{2}{3}s\right)\mathbf{a} = \left(\frac{1}{2} + t - \frac{1}{2}s\right)\mathbf{b}.$$

Då vektorerna **a** och **b** inte är parallella leder detta till att faktorerna framför de båda vektorerna måste vara noll:

$$\begin{cases} t - \frac{2}{3}s = -1 \\ t - \frac{1}{2}s = -\frac{1}{2} \end{cases},$$

som ger $t = 1$, $s = 3$ och $\overrightarrow{CS} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

Man kan beräkna $\overrightarrow{CT}$ på samma sätt, men om man drar linjen QB så följer av transversalsatsen att $\overrightarrow{BT} = -\overrightarrow{BA}$ och $\overrightarrow{CT} = 2\mathbf{b} - \mathbf{a}$.

Tyngdpunkten i triangeln STC bestäms nu av vektorn

$$\frac{1}{3}(\overrightarrow{CS} + \overrightarrow{CT}) = \frac{1}{3}(2\mathbf{a} - \mathbf{b} + 2\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}),$$

som även bestämmer tyngdpunkten i triangeln ABC.