Lösning till problem oktober 1999

Funktionen är jämn, ty $f(-x) = -f(x^2) = f(x)$, och det räcker att bestämma f för $x \geq 0$. Nu ger $x = 0$ och $x = 1$ att $2f(0) = 0 = 2f(1)$. Med induktion visar man att

$$f(a^{4^n}) = f(a), \text{ för } n = 0, 1, \ldots .$$

För $n = 0$ är båda leden lika. För $n = 1$ följer likheten av funktionalekvationen: $f(a^4) = -f(a^2) = f(a)$. Antag att likheten gäller för givet $n > 1$. Då gäller även

$$f(a^{4^{n+1}}) = f((a^{4^n})^4) = f(a^{4^n}) = f(a),$$

varmed induktionssteget är gjort.
För $0 < a$ gäller då

$$f(a) = \lim_{n\to\infty} f(a^{\frac{1}{4^n}}) = f(1) = 0,$$

som visar att f är nollfunktionen.

Svar: Nollfunktionen.