Lösning till problem september 1999

Om ett nollställe är medelvärdet av de två övriga så är summan av nollställena 3 ggr medelvärdet = $-a$. Således är $-\dfrac{a}{3}$ ett nollställe. Binomialkomplettering ger

$$x^3 + ax^2 + bx + c = \left(x + \frac{a}{3}\right)^3 - \left(\frac{a^2}{3} - b\right)\left(x + \frac{a}{3}\right) + c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27}.$$

Polynomet har nollstället $-\dfrac{a}{3}$ då och endast då

$$c = \frac{ab}{3} - \frac{2a^3}{27}.$$

De övriga nollställena ges då av

$$x = -\frac{a}{3} \pm \sqrt{\frac{a^2}{3} - b},$$

som är reella då och endast då $a^2 \geq 3b$.
Alltså: Om nollställena är reella och ett nollställe är medelvärdet av de två övriga så är

$$c = \frac{ab}{3} - \frac{2a^3}{27} \text{ och } a^2 \geq 3b.$$

Omvänt, om dessa villkor är uppfyllda är polynomets rötter

$$-\frac{a}{3}, \quad -\frac{a}{3} \pm \sqrt{\frac{a^2}{3} - b},$$

som alla är reella och där ett nollställe är medelvärdet av de två övriga.

Svar: $c = \dfrac{ab}{3} - \dfrac{2a^3}{27}$ och $a^2 \geq 3b$.