# Lösning till problem april 2000

Antag att $m = k + 1$ och $n = k - 1$ där $k = 2, 3, \ldots$ . Då är

$$\begin{aligned} m^n + n^m &= (k+1)^{k-1} + (k-1)^{k+1} \\ &= (k+1)^{k-1} + (k-1)^{k-1}(k^2 - 2k + 1) \\ &= (k+1)^{k-1} + (k-1)^{k-1} - 2k(k-1)^{k-1} + k^2(k-1)(k-1)^{k-2} \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} (1 + (-1)^j) k^{k-1-j} - 2k(k-1)^{k-1} + k^2(k-1)(k-1)^{k-2}. \end{aligned}$$

Alla termer i summan utom den som svarar mot $j = k - 1$ är delbara med $2k$. Dessutom är $k^2(k-1)$ delbart med $2k$. Alltså är resten vid division av $m^n + n^m$ med $m + n = 2k$ lika med $1 + (-1)^{k-1} = 1 + (-1)^n$ som är noll om och endast om $n$ är udda.

**Svar**: Uttrycket är ett heltal om och endast om de två talen $m$ och $n$ är udda.