Lösning till problem augusti 2000

Ekvationen kan skrivas

$$n = 19x + 24y + 29z = 19(x - z) + 24(y + 2z) = 24(y + 2x) + 29(z - x),$$

varav framgår att det finns en lösning med icke-negativa heltal om och endast om en av ekvationerna

$$n = 19s + 24t \qquad \text{och} \qquad n = 24s + 29t$$

har icke-negativa heltalslösningar.
Ekvationen $n = 19s + 24t = 19(s + t) + 5t$ har lösningarna $s + t = -n + 5k$, $t = 4n - 19k$, $k \in Z$ eller $s = 24k - 5n$, $t = 4n - 19k$, $k \in Z$. Nu är $s \geq 0$, $t \geq 0$ då och endast då det finns ett heltal i intervallet $[5n/24, 4n/19]$.
Ekvationen $n = 24s + 29t = 24(s + t) + 5t$ har lösningarna $s + t = -n + 5k$, $t = 5n - 24k$, $k \in Z$ eller $s = 29k - 6n$, $t = 4n - 19k$, $k \in Z$. Nu är $s \geq 0$, $t \geq 0$ då och endast då det finns ett heltal i intervallet $[6n/29, 5n/24]$.
Den ursprungliga ekvationen har alltså en lösning med icke-negativa heltal då och endast då det finns ett heltal i intervallet $[6n/29, 4n/19]$. Eftersom $6n/29 < 4n/19$ saknas heltal i detta intervall om och endast om $[4n/19] = [6n/29] < 6n/29$. Sätt $4n = 19m + a$ och $6n = 29m + b$, där $1 \leq a \leq 18$ och $1 \leq b \leq 28$. Elimineras m får man $2n = 29a - 19b$. Nu måste a och b vara kongrenta modulo 2 och alltså är $2n_{\max} \leq 29 \cdot 18 - 19 \cdot 2 = 484$, dvs $n_{\max} \leq 242$. För $n = 242$ får man $[6n/29, 4n/19] = [1452/29, 968/19] = [50 + 2/29, 50 + 18/19]$.

Svar: Man kan välja $n_0 > 242$, som är det största heltal för vilket den diofantiska ekvationen saknar icke-negativa heltalslösningar.