Lösning till problem maj 2000

För alla n och k i Z gäller

$$|\sin n\pi x| = |\sin n\pi x - \sin k\pi| = 2\left|\sin\frac{\pi(nx-k)}{2}\cos\frac{\pi(nx+k)}{2}\right| \leq |nx-k|\pi.$$

Välj ett heltal N så att $N > 100\pi$. Av de $N+1$ talen $jx-[jx] \in [0,1]$, där $j = 0, 1, \dots, N$ ligger minst två i ett och samma intervall av typ $\left[\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}\right]$, $j = 1, 2, \dots, N$. Alltså finns heltal a och b med $0 \leq b < a \leq N$ sådana att

$$\frac{j-1}{N} \leq ax - [ax] \leq \frac{j}{N}$$
$$-\frac{j}{N} \leq -bx + [bx] \leq -\frac{j-1}{N}$$

för något j. Elimination av j ger

$$-\frac{1}{N} \leq (a-b)x - ([ax]-[bx]) \leq \frac{1}{N}.$$

Sätt $n = a - b$ och $k = [ax] - [bx]$. Då är $|nx-k|\pi \leq \frac{\pi}{N} < \frac{1}{100}$ och $|\sin n\pi x| < \frac{1}{100}$.