Lösning till problem mars 2000

Lösning

Då $M \neq \emptyset$ och $x \in M$ så följer av (ii) att $0 = x - x \in M$. Men då ligger också $-x = 0 - x$ i M. Då M innehåller minst två element måste M innehålla positiva element.
Nu visar man induktivt att om $x \in M$ och $k \in Z$ så är $kx \in M$. (Det räcker att visa detta för positiva k ty $-kx = k(-x)$. Induktionssteget följer av identiteten $(k+1)x = kx - (-x)$.) Antag att det inte finns ett minsta positivt tal i M. Då kan man för varje $\delta > 0$ bestämma $x, y \in M$ med $0 < y < x < y + \delta$. Välj $\delta < \dfrac{1}{2}$. Då finns i intervallet $\left[1999, 1999 + \dfrac{1}{2}\right]$ ett element av typ $k(x-y)$. Men då ligger $(k+1)(x-y)$ i det öppna intervallet $]1999, 2000[$, vilket är en motsägelse.