Lösning till problemet mars 2001

Polynomet P kan skrivas som produkten av en reell konstant A, linjära faktorer $x + a$, och irreducibla kvadratiska faktorer $x^2 + 2Bx + C$. Villkoret $P(x) > 0$ för $x > 0$ ger att konstanten A är positiv och att konstanttermen a i de linjära faktorerna inte kan vara negativ. De kvadratiska faktorerna är irreducibla om och endast om $C > B^2$. Det finns alltså bara en typ av faktorer i P som kan innehålla negativa koefficienter, nämligen $x^2-2ax+b^2$, där $a > 0$ och $b^2 > a^2$. Det räcker därför att visa påståendet då $P(x) = x^2-2ax+b^2$, med $a > 0$ och $b^2 > a^2$.
Av identiteten

$$\left(x^2+b^2\right)^{2n} - (2ax)^{2n} = \left(x^2-2ax+b^2\right)\sum_{k=0}^{2n-1}\left(x^2+b^2\right)^k (2ax)^{2n-k-1}$$

följer att för $x > 0$ gäller $P(x) = \dfrac{Q(x)}{R(x)}$ med

$$Q(x) = \left(x^2+b^2\right)^{2n} - (2ax)^{2n} \qquad \text{och} \qquad R(x) = \sum_{k=0}^{2n-1}\left(x^2+b^2\right)^k (2ax)^{2n-k-1}.$$

Här har polynomet R inga negativa koefficienter. Den enda koefficienten i polynomet Q som kan vara negativ är kofficienten

$$b^{2n}\binom{2n}{n} - (2a)^{2n}.$$

Eftersom $\left(\dfrac{b^2}{a^2}\right)^n \geq n\dfrac{b^2-a^2}{a^2}$ för alla naturliga tal n, räcker det att visa att man kan välja n så att

$$c_n = \frac{n}{2^{2n}}\binom{2n}{n} \geq \frac{a^2}{b^2-a^2}.$$

För $n \geq 2$ gäller $\dfrac{c_n}{c_{n-1}} = 1 + \dfrac{1}{2(n-1)} \geq \sqrt{1+\dfrac{1}{n-1}} = \sqrt{\dfrac{n}{n-1}}$, varav $c_n \geq c_1 \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\sqrt{\frac{k+1}{k}} = \frac{\sqrt{n}}{2}$. För $n \geq \dfrac{4a^4}{(b^2-a^2)^2}$ blir alla koefficienter i polynomet Q icke-negativa.