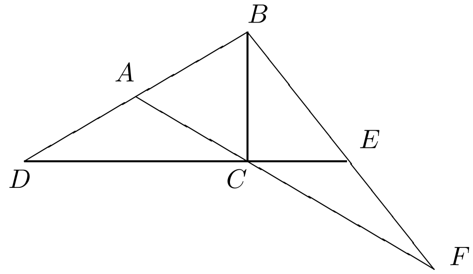
Lösning till problemet november 2001



I den liksidiga triangeln ABC är alla vinklar $60°$. I den likbenta triangeln ACD är enligt yttervinkelsatsen basvinklarna $30°$. Härav följer att trianglarna BCD och BCE är rätvinkliga vid C. I triangeln CEF är $\angle ECF = 30°$. Sätt $\varphi = \angle CFE$ och $x = |BE|$. Pythagoras sats på BCE ger $|CE| = \sqrt{x^2 - a^2}$. Sinusteoremet på trianglarna CEF och ABF ger

$$\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{\sin\varphi} = \frac{a}{\sin 30°} \quad \text{och} \quad \frac{a}{\sin\varphi} = \frac{x+a}{\sin 60°}.$$

Elimination av φ leder till

$$\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{x+a} \quad \text{eller, med } t = \frac{x}{a}, \quad \sqrt{t^2 - 1} = \frac{\sqrt{3}}{t+1}.$$

Kvadrering, förenkling och faktorisering ger

$$\begin{gathered}(t^2 - 1)(t+1)^2 = 3\\ t^4 + 2t^3 - 2t - 4 = 0\\ (t+2)(t^3 - 2) = 0.\end{gathered}$$

Ekvationen har alltså endast en reell positiv rot, nämligen $t = \sqrt[3]{2}$.
Prövning i rotekvationen ger

$$\begin{aligned} t = \sqrt[3]{2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{t^2 - 1} &= \sqrt{\sqrt[3]{4} - 1}\\ &= \sqrt{\frac{(\sqrt[3]{4} - 1)(\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{4} + 1)}{\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{4} + 1}}\\ &= \sqrt{\frac{4 - 1}{2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} + 1}}\\ &= \sqrt{\frac{3}{(\sqrt[3]{2} + 1)^2}}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{t+1}. \end{aligned}$$

Svar: $|BE| = a\sqrt[3]{2}$