Lösning till problemet oktober 2001

Sätt

$$n = 2^{k+1} + 2^{k-1} + 2^{k-2} + \cdots + 2 + 1 = 2^{k+1} + 2^k - 1 \text{ för } k \geq 3.$$

I bas 2 har n exakt $k+1$ ettor. Talet n^2 får framställningen

$$\begin{aligned} n^2 &= 2^{2k+2} + 2^{2k} + 1 + 2 \cdot 2^{k+1} \cdot 2^k - 2 \cdot 2^{k+1} - 2 \cdot 2^k \\ &= 2 \cdot 2^{2k+2} + 2^{2k} - 2^{k+2} - 2^{k+1} + 1 \\ &= 2^{2k+3} + 2^{k+1}(2^{k-1} - 2 - 1) + 1 \\ &= 2^{2k+3} + 2^{k+1}(2^{k-2} + 2^{k-3} + \cdots + 2^2 + 1) + 1. \end{aligned}$$

Talet inom parentesen har $k-2$ ettor och därför har n^2 exakt k ettor.