Lösning till problemet september 2001

Olikheten är ekvivalent med

$$\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}+\frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}>1.$$

Vänsterledet är avtagande och om $n \leq 5$ gäller, enligt olikheten mellan aritmetiskt och geometriskt medium, att

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}+\frac{1}{n^{\frac{3}{4}}} &\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}}}} \\
&= \sqrt[3]{\frac{27}{n^{\frac{23}{12}}}} \\
&> \sqrt[3]{\frac{n^2}{n^{\frac{23}{12}}}} \\
&= \sqrt[3]{n^{\frac{1}{12}}} \geq 1.
\end{aligned}$$

Återstår attt visa att

$$\sqrt{6}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[4]{6} \leq 6.$$

Men

$$\begin{aligned}
\sqrt{6} < \sqrt{6.25} = \sqrt{2.5^2} &= 2.5 \\
\sqrt[3]{6} < \sqrt[3]{6.859} = \sqrt[3]{1.9^3} &= 1.9 \\
\sqrt[4]{6} < \sqrt[4]{6.5536} = \sqrt[4]{1.6^4} &= 1.6 \\
\sqrt{6}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[4]{6} < 2.5+1.9+1.6 &= 6.
\end{aligned}$$

Svar: Olikheten gäller då och endast då $n \leq 5$.